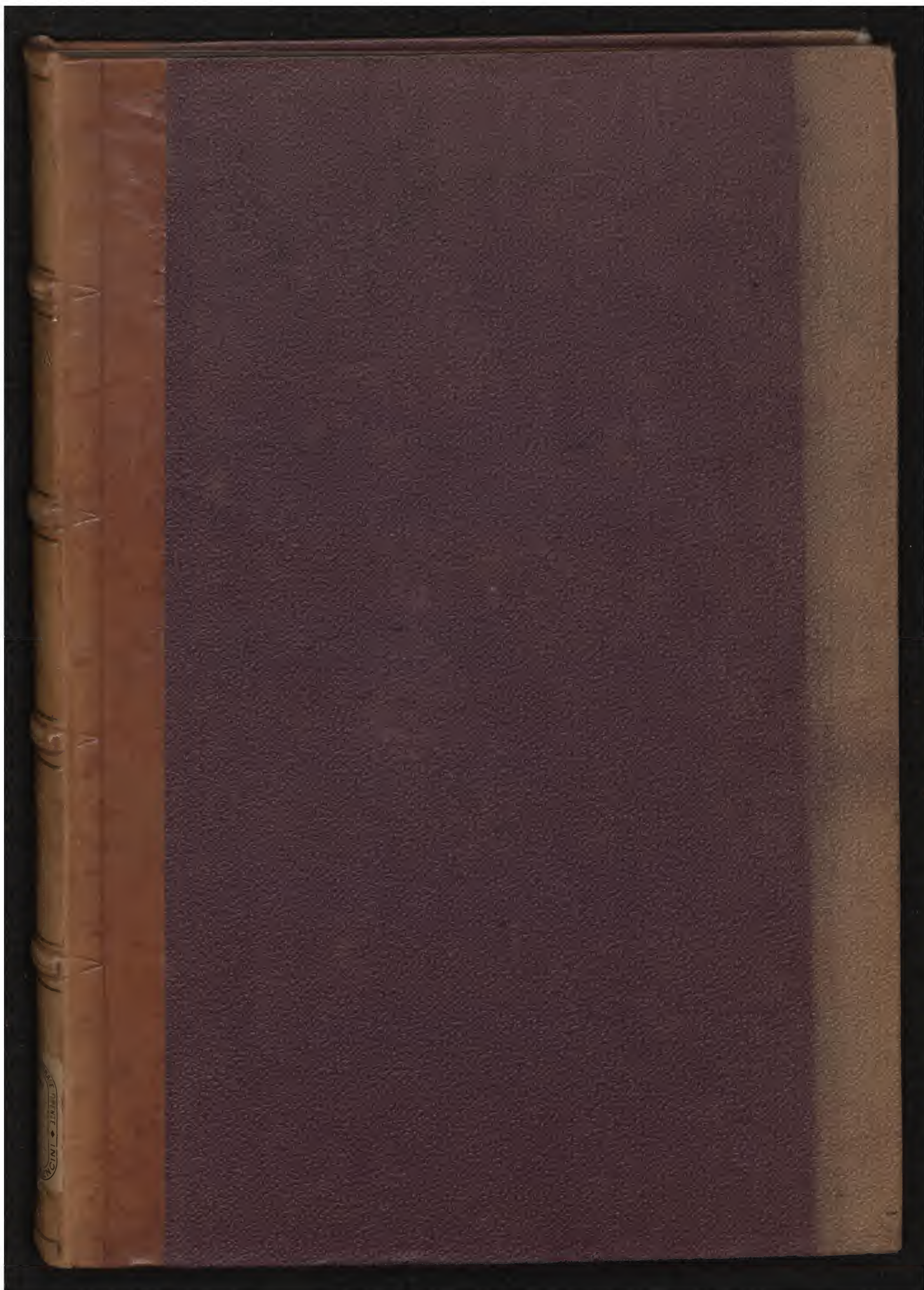
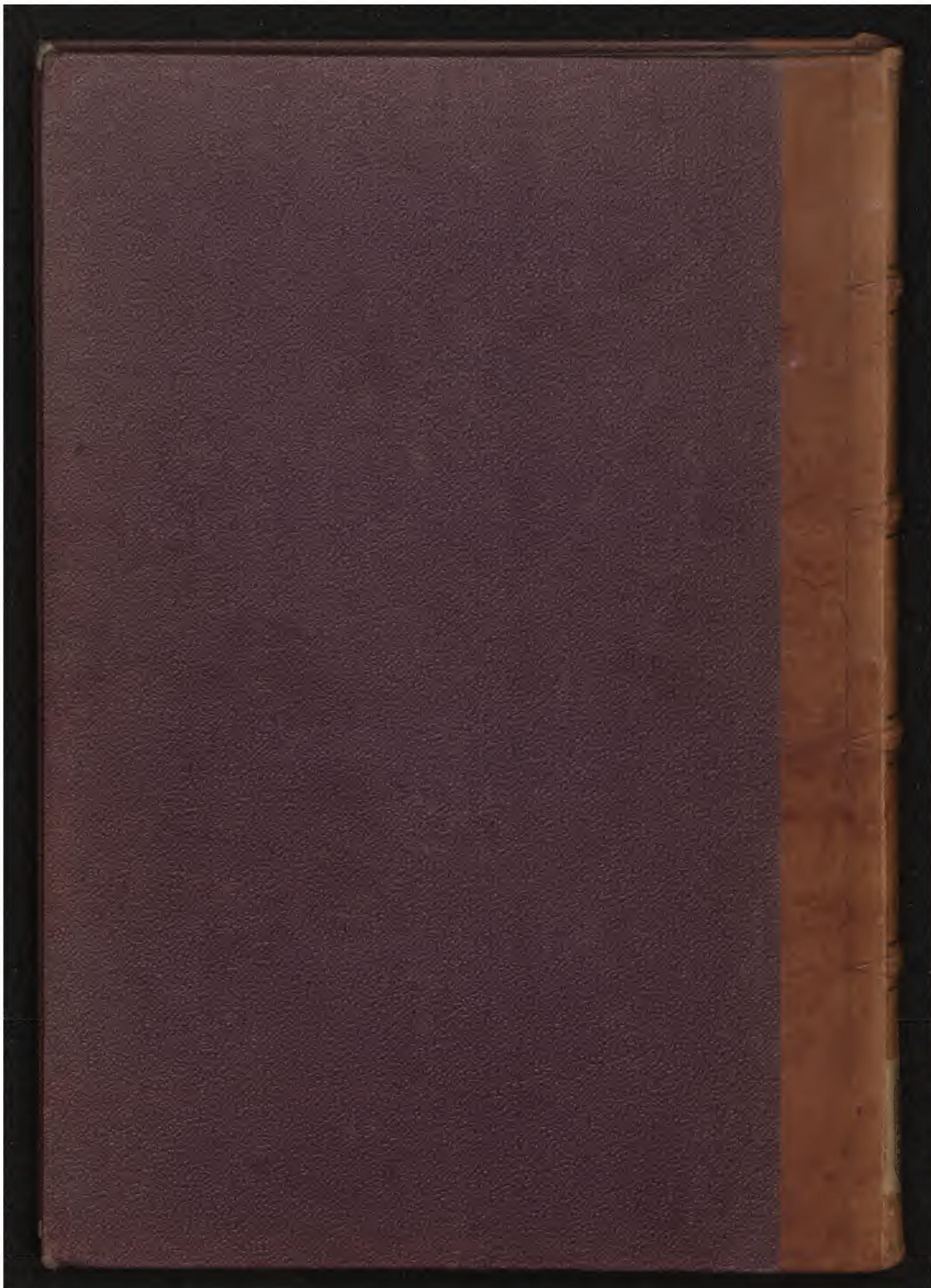
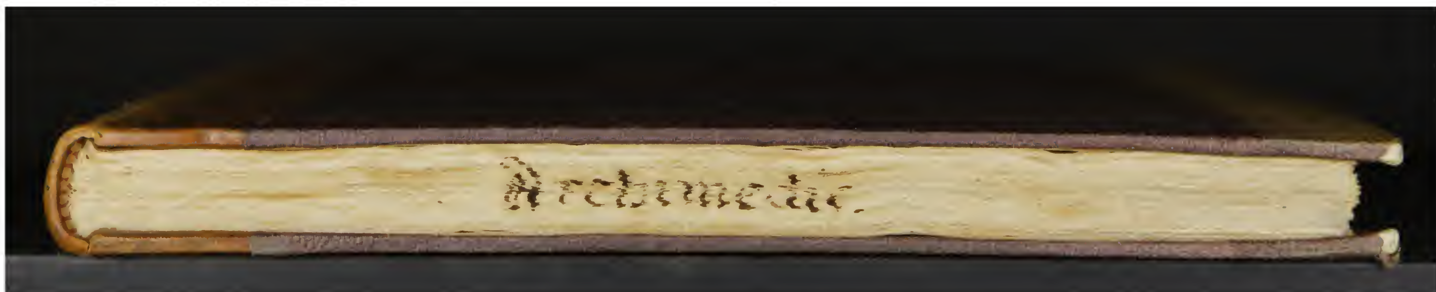



OPERA
ALDINI
III
7
VENETIIS
1558
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
Ald.3.7.2










BIBLIOTECA NAZIONALE CENTRALE - FIRENZE
ALDINI
III
7
2
RACCOLTA NENCINI

# ARCHIMEDIS
## OPERA NON NVLLA

À FEDERICO COMMANDINO
VRBINATE

*NVPER IN LATINVM CONVERSA,*
ET COMMENTARIIS
ILLVSTRATA.

Quorum nomina in sequenti pagina leguntur.




CVM PRIVILEGIO IN ANNOS X.

VENETIIS,
apud Paulum Manutium, Aldi F.
M D L V I I I.

# ARCHIMEDIS OPERA,

## QVAE HOC LIBRO CONTINENTVR.

# RAINVTIO FARNESIO,

## CARDINALI AMPLISSIMO,

### *ET OPTIMO.*



VANQVAM ſcientiæ omnes AMPLISSIME CARDINALIS, quibus intercedentibus ad Deos immortales quamproxime accedimus, ueritatem propoſitam habent, quam, ut ſubiectam materiam tractant, & in cuius inquiſitione, atque inueſtigatione uerſantur: tamen mathematicæ diſciplinæ, meo quidem iudicio, id munus præclare tueri uidentur; quæ non ſolum per ſeipſas, id, quod ſpectant, aſſequuntur; uerum etiam reliquis ſcientiis clariſsimam lucem afferentes, ut earum multo faciliorem cognitionem capiamus, efficiunt. Si enim in naturæ obſcuritatem (ut ab ea potiſsimum ordiamur) intuebimur: ne minimam quidem partem reperiemus, non ſexcentis obſtructam difficultatibus; in qua quid ueriſimillimum ſit, inuenire, non mediocris ingenii, & ſummæ felicitatis eſſe iudicandũ eſt. Mundus ipſe utrum nunquam non fuerit, an aliquando genitus ſit, inter non minorum gentium philoſophos, ſed philoſophiæ ipſius parentes Platonem, & Ariſtotelem ſumma fuit diſſenſio. De principiis autem rerum, è quibus omnia oriuntur, quando tres, aut ad ſummum quatuor philoſophi, qui eadem ſentirent, inuenti ſunt? Nam de motu, de inani, de tempore, de elementis ipſis, & eorum natura, uariæ, atque inter ſe diſsidentes philoſophorum ſententiæ facile oſtẽdunt, phyſiologiam quibuſdam potius coniecturis, quam firmiſsimis argumentationibus niti; optimeq; nobiſcum agi, ſi, quid in ea maxime probabile ſit, intelligamus. quamobrem diuinus Plato non immerito eiuſmodi ſcientiam εἰκοτολογίαν appellandã eſſe cenſuit. Quid dicam de prima philoſophia? quæ Deum quidem optimum maximum, diuinasq; illas mentes ſibi examinandas, explicandasq; proponit: uerum neque id, quod pollicetur, præſtare poteſt: & ex iis, quæ ſub oculos noſtros cadunt, nos ad diuinæ bonitatis, ac potentiæ contemplationem perducit. exactas autem, & exquiſitas illas rationes, quibus mathematici iure gloriari poſſunt, tantum abeſt, ut attingat, ut cum Socrate aperte fateatur, ueram ipſius Dei notionem, per inficiationem tantum haberi poſſe, animorumq; noſtrorum quaſi luminibus tantarum rerum altitudinem officere. Vt enim ueſpertiliones lumẽ ſolis ferre non poſſunt, ita diuinarum rationum ſplendor, ac

dignitas ingenii noſtri aciem perſtringit. Cum igitur è tribus ſcientiis, quæ uere ſcientiæ appellantur, & phyſiologia, & prima philoſophia in probabilitate uerſentur, reſtant mathematicæ diſciplinæ, quæ non tam ſubiecta materia, quàm certarum argumētationum, quas in mediū afferunt, dignitate, reliquis ſcientiis iure optimo antecellunt. nā ſi quid mathematici, uel in geometria, uel in aſtrologia, uel arithmeticis ratione confirmant, id ex oraculo Pythii Apollinis nobis editū exiſtimari poteſt. Quàm uero late pateant hæ diſciplinæ; quantas utilitates, & domeſticis, & forenſibus rebus importent, ex earum diuiſione apertiſsime cognoſcemus. Siquidem primum uel circa ea uerſantur, quæ quamuis à materia re ipſa ſeparari non poſſunt: tamen cogitatione, atque intellectione, ut ſeparabilia comprehenduntur: quod genus ſunt geometria, & Arithmetice. uel in eorum, quæ ſenſibus percipiuntur, contemplatione occupantur: quo in numero mechanice, aſtrologia, optice, metiendi ratio, muſica, ratiocinatrix à ueteribus reponuntur. Deinde harum unaquæque partium in uaria tanquam membra diſpertitur. quæ omnia tantum habent momentum, cum ad rerum priuatarum, & publicarum adminiſtrationem, tum ad animi noſtri perfectionem, ut uere dicere poſsimus, ex omnibus ſcientiis, & artibus, quæ à clariſsimis uiris inuentæ ſunt, & auctæ, nihil mathematicis diſciplinis honeſtius, nihil utilius, nihil humano generi magis neceſſarium excogitari potuiſſe. Omitto, quòd Pythagorei numeris mundum, & omnia, quæ in eo eſſent, accepta referebant; quòd Plato ab Academia ſua rudes in geometria reiiciendos eſſe iudicabat. Quid Ariſtoteles? quem noſtræ memoriæ philoſophi nunquam nō in manibus habent. num quæ uir ille ſummus, uel in diſſerendi ratione, uel in naturæ obſcuritate ſcripſit, hoſpes in mathematicis diſciplinis attingere audebit? quare mea ſententia nemo uere philoſophari poterit, niſi idem prius in his nobiliſsimis artibus plurimum ſtudii, plurimumq; operæ poſuerit. nec aliter ſenſiſſe uideo Galenum medicorum principem in eo libello, qui Philoſophus inſcribitur. Venio nunc ad id uitæ genus, quod, omiſſo ueritatis indagandæ ſtudio, totum ſe ad actionem conuertit. huic ſi recte conſideremus, maximo uſui eſſe mathematicas diſciplinas inueniemus.
Nam ſiue priuatis, & domeſticis negociis diſtringimur, & uel rei ruſticæ, uel mercaturis faciendis operam damus; nunquam ſine aſtrologia, & metiendi, ratiocinandiq; ratione recte munus noſtrum exequemur: ſiue ad gubernacula rerum publicarum ſedentes, pro earum dignitate, atque incolumitate uigilamus, cum de Solonis ſen-
tentia

tentia præmium, & pœna ſint ea fundamenta, quibus res omnes publicæ nituntur: non uideo qua ratione fieri poſsit, ut ſtudioſis ciuibus, qui de patria beni meriti ſint, præmia pro dignitate decernamus; ſeditioſis autem, & improbis hominibus debitas pœnas infligamus, niſi ex geometria, & arithmeticis utraſque proportiones optime didicerimus; quemadmodum à principe philoſophorum Ariſtotele in quinto de uita, & moribus non tam eleganter, quàm copioſe diſputatum eſt. Quòd ſi bellum mari, aut terra gerere oporteat, & uel hoſtes à mœnibus noſtris repellendi, uel nos iniuriis affecti ad eorum urbes oppugnandas cum exercitu proficiſci neceſſe habeamus: incredibile eſt, quàm magnum nobis adiumentum afferat, non ſolum geometria, & arithmetice, uerum etiam ea pars mathematicarum diſcipinarũ, quàm μηχανικὴν græci uocant; & eius adminiſtra ὀργανοποιητικὴ ab iiſdem appellata. immo, ſi uerum fateri uolumus, ſine his artibus res militaris manca quodam modo, & imperfecta eſt habenda. Nam præter alia multa, quæ in ſummo imperatore ineſſe oportet, quis neſcit illa tria non in poſtremis habenda eſſe? rectam caſtrametandi rationem, qua in re Pyrrhum Epirotarum regem ſuæ, ac ſuperioris memoriæ imperatoribus præſtitiſſe accepimus: inſtruendi aciem prudentiam, quam quidem in Alexandro Magno, & poſt eũ in Romanis imperatoribus eximiam fuiſſe, omnes ferè hiſtorici & græci, & latini literarum monumentis prodiderunt: ſolertiam in excogitandis machinis, ac tormentis militaribus, quæ uel ad propugnationem, uel oppugnationem urbium attinent: cuius artificii gloriam Romani ceteris nationibus facile præripuerunt. Num hæc omnia ſine his diſciplinis, quas paulo ſuperius commemoraui, rei militari tantopere neceſſariis, ulla ratione adminiſtrari poſſunt? Hanc eſſe cauſſam exiſtimo, cur OCTAVIVS frater tuus, Parmenſium, & Placentinorũ Dux, multos abhinc annos in mathematicas diſciplinas ſibi toto animo incumbendum putauit. cum enim ſe ad gloriam, & amplitudinem natum eſſe intelligeret; nihil prætermittere uoluit, quod eum omnis memoriæ ducibus parem, atque adeo ſuperiorem efficere poſſet. Vides igitur, AMPLISSIME CARDINALIS, homines, qui uere homines ſunt, non aqua, non igni (ut in prouerbio eſt) pluribus locis uti, quàm mathematicis diſciplinis. In his complures quidem ſummi, & admirabiles uiri extiterunt. ſed Archimedes Syracuſanus omnes omnium temporum mathematicos longe, multumq; ſuperauit. nam & in aſtrologia quamplurima, quæ ſuperiores ignorauerant, adinuenit. quod facilius intelligeremus, ſi ſphæram illam ui-

tream

tream ab eo admirabili quodam artificio constructam habremus, in qua septem errantium stellarum cursus, multum interse, aut altitudine, aut humilitate distantes oculis cerneremus. & in arithmeticis quantum excelluerit, illo aureo libello, quem de arenæ numero conscripsit, apertissime ostendit. In musicis autem, quamis nihil ab eo memoriæ, ac literis proditum in manus nostras peruenerit: tamen credibile est, egregium illum uirum huius etiam disciplinæ uim, & materiam scientia, & cognitione cōprehendisse: potiusq; aliquid, ac potius multa addidisse, & attulisse de suo, quàm non omni, quæ uoluerit, consecutum esse. Nam quòd ad geometriam attinet, Deum aliquem in ea fuisse Archimedem nemo sanæ mētis inficiari poterit. siquidem is nō solum in geometricis rationibus se ipsum exercuit, ut faciliorem sibi aditum ad rerum cælestium contemplationem præpararet: uerum etiam, ut eas ad communes hominum utilitates, tum in bello, tum in pace transferret, magnopere elaborauit. quod licet ante eum Architas, & Eudoxus contra diuini Platonis sententiam factitauerint: tamen si cum Archimede comparentur, uix quintæ classis (ut ita dicam) mathematici uidebuntur. machinationes enim illas, quæ in gratiam Hieronis regis ab Archimede excogitatæ sunt, nullæ unquam literæ conticuerunt. Nauis illa oneraria, quam unius machinæ adiumento, solus nullo negocio deduxit, adhuc sermone omnium celebratur. huius artificii uim Marcellus imperator in Syracusanæ urbis oppugnatione sensit, cum non sine multarum nauium iactura, & quamplurimorum militum cæde urbem expugnasset. quamobrem cum in ipsa militum, qui superfuerant, in urbem irruptione, quantum in ipso fuit, Archimedis saluti, & incolumitati consuluisset: magnopere doluit, posteaquam eum contra suum imperium à gregario milite interfectum esse intellexit: eumq; honorem mortuo habuit, qui præstantissimis uiris post obitum haberi solet. cuius sepulchrum M. Cicero à se, cum in Sicilia quæstorem ageret, repertum esse, mirandum in modum gloriatur. Multa alia prætereo, quæ cum uerissima sint, tamen apud posteros plus admirationis, quã fidei habuerunt. Archimedis pauca quidem extant scripta, sed obscurissima, & quæ maximo negocio uix intelligi possint. quorum cum nonnulla iam ab Eutocio Ascalonita doctissime, planissimeq; explicata essent, superioribus temporibus Ioannes Regiomontanus, quem honoris caussa nomino, reliqua interpretãda suscepit. uerum, nescio quo fato, lucubrationes illæ à studiosis adhuc desiderantur. Nostra uero memoria Franciscus Maurolicus Messanensis in hoc ge-

nere

nere literarum à primis temporibus ætatis ſuæ uerſatus, ad eandem interpretationem aggreſſus eſt. qua in re (ut mea fert opinio) & officio ſuo, & expectationi hominum cumulate ſatisfeciſſet, niſi poſtremo, ſcientiis mathematicis multa ſalute dicta, ſacrarum literarũ in ſtudia ſeſe penitus abdidiſſet. Ego uero, cum ut eorum, qui hiſce diſciplinis delectantur, ſtudia incitarem, tum ut mihi ipſi ſatisfacerem, eandem interpretandi Archimedis prouinciam ſuſcepi. quam iis, qui nondum in his ſtudiis magnos progreſſus fecerunt, arbitror fore non inutilem. non enim me Perſio, uel Scipioni, aut Rutilio ſcripſiſſe profiteor, quorum iudicium à Lucilio reformidabatur, ſed iis, qui mathematicas diſciplinas primoribus labris attigerunt. fortaſſe poſthac alii, quibus ego in hoc ſcientiæ genere facile concedo, meo exemplo admoniti, multo & meliora, & uberiora conſcribent, atque Archimedis ſenſa latinis literis tum doctius, tum elegantius illuſtrabunt. Hos autem meos labores, qualeſcunque ſint, cur tibi præcipue dicarem, multæ quidem me cauſſæ impulerunt. ſed illa una, ut id præcipue facerem, hortata eſt, quòd ex ampliſsimis patribus, quibus eccleſiæ ſanctæ procuratio commiſſa eſt, neminem habemus, qui tanto ſtudio harum diſciplinarum teneatur; quas tibi tanquam gradus quoſdam feciſti ad diuinam ſapientiam, quæ uere ſapientia eſt, aſſequendam. Nam de mea erga te perpetua obſeruantia, tuaq; ſingulari erga me humanitate in præſentia mihi tacendum eſſe iudico, ne, quod cogitatione uix poſſum, uidear oratione uoluiſſe complecti. unum illud dicam, ſi hos meos commentariolos tibi nõ ingratos eſſe cognouero, nihil mihi gratius, nihil optatius accidere potuiſſe. tuum enim in omnibus ſcientiis acerrimum iudicium, ea, qua polles, auctoritate coniunctum, me clientem tuum ab omnĩbus maleuolorum obtrectationibus facile uindicabit.

Federicus Commandinus.

# ARCHIMEDIS
## CIRCVLI DIMENSIO.

### PROPOSITIO I.



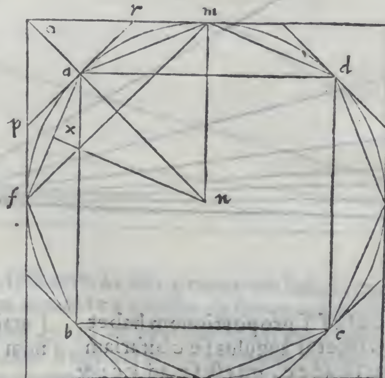
QVILIBET circulus æqualis eſt triangulo rectangulo: cuius quidem ſemidiameter uni laterum, quæ circa rectũ angulũ ſunt, ambitus uero baſi eius eſt æqualis.

SIT a b c d circulus, ut ponitur. Dico eum æqualem eſſe triangulo e. ſi enim fieri poteſt, ſit primum maior circulus: & ipſi inſcribatur quadratum a c: ſecenturq; circunferentiæ bifariam: & ſint portiones iam minores exceſſu, quo circulus ipſum triangulum excedit. erit figura rectilinea adhuc triangulo maior. Sumatur centrum n; & perpendicularis n x. minor eſt igitur n x trianguli latere. eſt autem & ambitus rectilineæ figuræ reliquo latere minor; quoniam & minor eſt circuli ambitu. quare figura rectilinea minor eſt triangulo e: quod eſt abſurdum.

Sit deinde, ſi fieri poteſt, circulus minor triangulo e: & circumſcribatur quadratum: circũferentiisq; bifariam ſectis, per ea puncta contingentes lineæ ducãtur. erit angulus o a r rectus. & idcirco linea o r maior, quàm r m; quòd r m ipſi r a ſit æqualis. triangulum igitur r o p maius eſt, quàm dimidium figuræ o f a m. itaque ſumantur portiones, ipſi p f a ſimiles; quæ quidem minores ſint eo, quo triangulum e excedit circulum a b c d. erit figura circumſcripta adhuc triangulo e minor: quod item eſt abſurdum, cum ſit maior: nam ipſa quidem n a æqualis eſt trianguli catheto: ambitus uero maior eſt baſi eiuſdem. ex quibus ſequitur circulum triangulo e æqualem eſſe.

### PROPOSITIO II.

Circulus ad quadratũ diametri eam proportionẽ habet, quam XI ad XIIII.



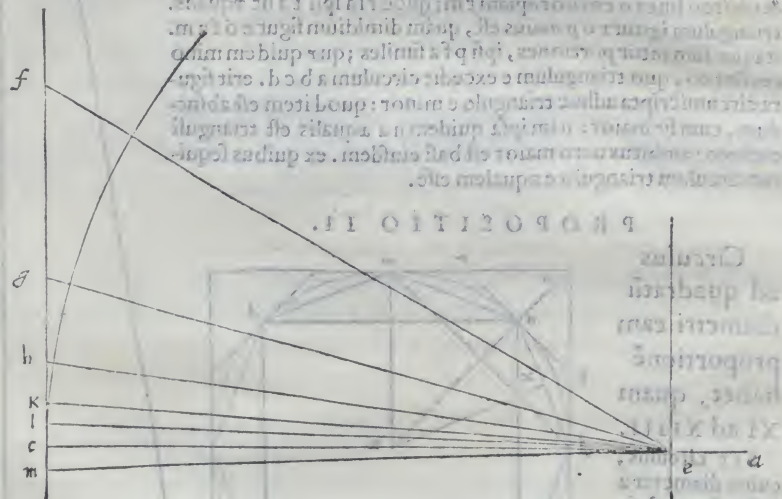

SIT circulus, cuius diameter a b: & circumſcribatur quadratũ c g: & ipſius c d dupla ſit d e: ſit autem e f, ſeptima eiuſdẽ c d. Quo-

niam igitur a c e triangulũ ad triangulum a c d eam proportionẽ habet, quam 21 ad 7: triangulum autem a c d ad triangulum a e f habet eam, quam 7 ad 1: erit a c f triangulum ad triangulum a c d, ut 22 ad 7. ſed ipſius a c d trianguli quadruplum eſt c g quadratum: & triangulum a c f circulo a b eſt æquale, quoniam cathetus a c æqualis eſt ſemidiametro, baſis autem diametri tripla, & propè ſeptima parte excedens, ut monſtrabitur. Circulus igitur ad quadratum c g eandem proportionem habet, quam 11 ad 14.

## PROPOSITIO III.

CViuslibet circuli ambitus diametri eſt triplus, & adhuc ſuperat parte quapiam, quæ quidem minor eſt ſeptima diametri, maior autem decem ſeptuageſimis primis.

a. b Sit circulus, cuius diameter a c, centrum e: & c l f linea circulum contingat: & angulus f e c ſit tertia pars recti. ergo linea e f ad f c eam proportionem habet, quam




c 306 ad 153. ipſa uero e c ad c f [proportionem habet
d eam, quam] 265 ad 153. ſecetur angulus f e c bifariam ducta e g linea. ut igitur f e ad e c, ita eſt f g ad g c: & permutando, componendoq́;, ut utraque f e, e c ad f c, ita e c ad c g. maiorem ergo

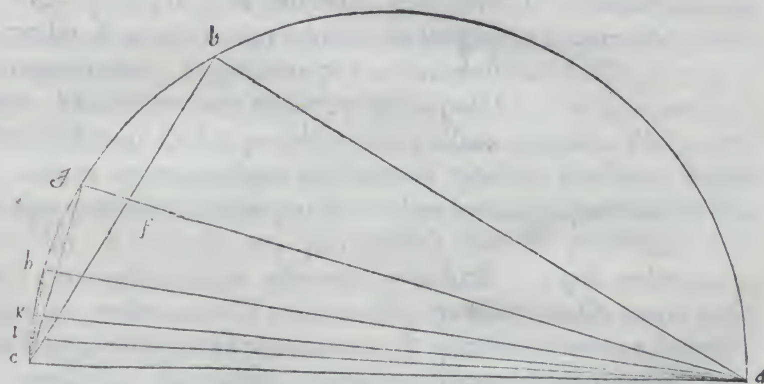
[maiorem proportionem habet, quàm]

ergo proportionem habet c e ad c g, quàm 571 ad 153.
[quare e g ad g c eam potestate proportionem habet, e
quam 349450 ad 23409; longitudine uero eam, quam
$591\frac{1}{8}$ ad 153.] Rursus angulus g e c bifariam secetur
ipsa e h linea. eadem ratione e c ad c h maiorem pro- f
portionem habet, quàm $1162\frac{1}{8}$ ad 153. quare h e ad h
c maiorem habet, quàm $1172\frac{1}{8}$ ad 153. Secetur item

[ quare e g ad g c potestate maiorem habet proportionem, quàm 349450 ad 23409; longitudine uero maiorē, quàm $591\frac{1}{8}$ ad 153 ]

h e c angulus bifariam ducta e k. habet e c ad c k proportionem maiorem, quàm g
$2334\frac{1}{4}$ ad 153. ergo e k ad c k maiorem habet, quàm $2339\frac{1}{4}$ ad 153. Secetur de- h
mum angulus k e c bifariam ipsa l e. habet igitur e c ad l c maiorem proportio- i
nem, quàm $4673\frac{1}{2}$ ad 153. Itaque quoniam angulus f e c, cum sit tertia pars re- K
cti, quater bifariam sectus est: ipse l e c angulus erit recti pars quadragesima octaua. ponatur iam angulo l e c æqualis angulus ad e, qui sit c e m. erit l e m angulus recti pars uigesima quarta. quare l m recta linea latus erit polygoni circulo circumscripti, quod sex & nonaginta lateribus continetur. Quoniam igitur ostensa est e c ad c l maiorem habere proportionē, quàm $4673\frac{1}{2}$ ad 153: ipsius autem e c dupla est a c: & ipsius c l dupla l m: habebit a c ad ambitum polygoni sex & nonaginta laterum, proportionem maiorem, quàm $4673\frac{1}{2}$ ad 14688. & est tripla, exceditq; $667\frac{1}{2}$, quæ quidem minora sunt, quàm septima pars $4673\frac{1}{2}$. quare ambitus polygoni circulo circūscripti ipsius diametri est triplus, & insuper minor, quàm sesquiseptimus. circuli igitur ambitus multo minor est, quàm triplus sesquiseptimus suæ diametri.

Sit circulus, cuius diameter a c: & angulus b a c tertia pars recti. habet ergo a b l
ad b c minorem proportionem, quàm 1351 ad 780. sed a c ad c b habet eam, quam
1560 ad 780. secetur bifariam angulus b a c ducta linea a g. Itaque quoniam æqua- m
lis est angulus b a g angulo g c b; sed & ipsi g a c: erit & g c b angulus ipsi g a c æqua-
lis. et angulus communis a g c est rectus. ergo & tertius angulus g f c, tertio a g c n
æqualis erit: & triangulum a g c triangulo c g f æquiangulum. quare ut a g ad g c, ita
c g ad g f, & a c ad c f. sed ut a c ad c f, ita & utraque c a, a b ad b c. ut igitur utraque o
b a, a c ad b c, ita a g ad g c: & propterea a g ad g c minorem habet proportionem,




quàm 2911 ad 780, ipsa uero a c ad c g minorem habet, quàm $3013\frac{3}{4}$ ad 780. Rur-
sus secetur bifariam angulus c a g ducta a h. habet eadem ratione a h ad h c minorem p
proportionem, quàm $5924\frac{3}{4}$ ad 780, uel quàm 1823 ad 240. utraque enim utrius- q
que est $\frac{4}{13}$, quare a c ad c h minorem proportionem habet, quàm $1838\frac{9}{11}$ ad 240. se- r
cetur item bifariam angulus h a c ducta k a. ergo & ipsa k a ad k c minorem habet

proportionem, quam 3661 $\frac{9}{11}$ ad 240, uel quàm 1007 ad 66: nam utraque ucriusque est $\frac{11}{40}$. quare a c ad *k* c minorem habet, quàm 1009 $\frac{1}{6}$ ad 66. secetur postremo *k* a c angulus bifariam ipsa l a. habet l a ad a c minorem proportionẽ, quàm 2016 $\frac{1}{6}$ ad 66. ipsa uero a c ad c l minorẽ habet, quàm 2017 $\frac{1}{4}$ ad 66. è contrario igitur poly goni ambitus ad diametrũ maiorẽ proportionem habet, quàm 6336 ad 2017 $\frac{1}{4}$; quæ quidem 6336 ipsorum 2017 $\frac{1}{4}$ maiora sunt, quàm tripla super decies partientia septuagesimas primas. quare & ambitus polygoni sex & nonaginta laterum circulo inscripti, ipsius diametri maior est, quàm triplus superdecies partiens septuagesimas primas. circuli igitur ambitus multo maior est, quàm triplus superdecies partiens septuagesimas primas. Ex quibus constat circuli ambitum suæ diametri triplum esse, & adhuc minorem, quàm sesquiseptimum; maiorem uero, quàm superdecies partientem septuagesimas primas.

# ARCHIMEDIS
## LIBER DE LINEIS SPIRALIBVS

### ARCHIMEDES DOSITHEO S. D.



EMONSTRATIONES theorematum, quæ ad Cononem miſſa ſunt; quas ut conſcriberem, aſſidue efflagitabas; plurimas in iis quidem libris, quos Heraclides attulit, explicatas habes: nonnullas uero hoc etiam uolumine cõplexus ad te mitto. Verum ne mireris, ſi longi temporis interuallo has demonſtrationes edimus. hoc enim ea de cauſſa factum eſt, quòd prius cum iis cõmunicare ſtatueramus, qui in artium ſtudiis, & diſciplinis uerſati ſunt: & in his inueſtigandis omnem ſuam operam poſuerunt. Quædam enim in geometria theoremata principio uidentur uia, ac ratione tradi facile non poſſe; quæ deinde procedente tempore illuſtrantur, & tanquam excoluntur. At uero Conon, cum illi non ſatis diuturnum ad hæc indaganda tempus datum eſſet, re nondum abſoluta uitam cum morte commutauit, eaq; obſcura reddidit; cum tamen, his omnibus inuentis, & aliis quamplurimis illuſtratis, geometriæ ſcientiam magnopere ornaſſet, & auxiſſet. in eo enim non uulgarem harum diſciplinarum cognitionem, ſingularem præterea induſtriam fuiſſe, non ignoramus. Multorum uero annorum ſpatio poſt Cononis mortem, neminem uidemus ex his problematibus ullum attigiſſe. Placet igitur, eorum unumquodque ſigillatim in medium proferre: ſiquidem duo quædam continentur in eo libro ſeparata, quæ minime abſoluta ſunt. Ex quo fit, ut, qui omnia ſe inueniſſe prædicant, nec tamen demonſtrationem afferunt, eos facile res ipſa redarguat: quippe qui profiteantur ſe ea inueniſſe, quæ fieri nullo modo poſſunt. Quæ ſint igitur ea problemata, & quorum præterea demonſtrationes habes, quæ ue ſint, quæ in hoc libro continentur; tibi iam explicandum cenſeo. Primum problema erat, ſphæra data ſpatium planum inuenire, quod ſuperficiei ſphæræ eſſet æquale. a
quod quidem primum à nobis explicatum eſt in libro, quem de ſphæra edidimus. cum enim demonſtratum ſit, uniuſcuiuſque ſphæ

ræ ſuperficiem quadruplam eſſe maximi circuli, eorum, qui in ipſa deſcribuntur: conſtat fieri poſſe, ut ſpatium planum inueniatur
b ſphæræ ſuperficiei æquale. Secundum problema erat, Dato cono, uel cylindro ſphæram inuenire ipſi cono, uel cylindro æqualem.
c Tertium, Datam ſphæram plano ita ſecare, ut portiones eius inter
d ſe datam habeant proportionem. Quartum, Datam ſphæram plano ita ſecare, ut portiones ſuperficiei eius datam habeant proportio
e nem. Quintum, Datam ſphæræ portionem, portioni ſphæræ datæ
f ſimilem facere. Sextum, Datis duabus ſiue eiuſdem, ſiue non eiuſdem ſphæræ portionibus, inuenire portionem ſphæræ, quæ alteri quidem earum ſit ſimilis, ſuperficiem uero alterius ſuperficiei æqua
g lem habeat. Septimum, A data ſphæra portionem plano ita abſcindere, ut portio ad conum, cuius baſis ſit eadem portioni, & altitudo æqualis, datam proportionem habeat; quæ quidem maior ſit ea, quam habent tria ad duo.

Horum igitur quæ dicta ſunt, omnium, Heraclides demonſtrationes attulit. Quod autem poſt hæc erat ſeparatum, falſum eſt. Si ſphæra uidelicet plano ſecetur in partes inæquales; maior portio ad minorem duplam proportionem habet eius, quam ſuperficies maior habet ad minorem. Hoc uero falſum eſſe apparet ex iis, quæ prius ad te miſſa ſunt, Erat enim & illud in ipſis ſeparatum, ſi ſphæra ſecetur in partes inæquales plano ad rectos angulos ducto ſuper aliquã diametrum earum, quæ ſunt in ſphæra: maior portio ad minorem eandem habebit proportionem, quam portio diametri maior ad mi-
h norem. ſphæræ nanque maior portio ad minorem, minorem quidem proportionem habet, quàm ſit dupla illius, quæ eſt maioris ſuperficiei ad minorem, maiorem uero, quàm ſit eiuſdem ſeſquialtera. Erat præterea & extremum problema ſeparatũ, falſum. ſi ſphæræ alicuius diameter ſecetur ita, ut quadratum maioris partis, quadrati minoris ſit triplum, & per punctum ſectionis planũ ad rectos angulos ſuper diametrũ ducatur, quod ipſam ſphæram ſecet: erit talis figura, qualis eſt maior ſphæræ portio, aliarum portionũ maxima, quæ ſuperficiem habeant æqualem. Id autem falſum eſſe conſtat ex theorema
i tibus, quæ ad te miſſa ſunt. demonſtratum enim eſt, dimidiam ſphæram maximam eſſe omnium ſphæræ portionum, quæ æquali ſuperficie contineantur. Deinde de cono hæc propoſita erant. Si rectanguli coni ſectio manente diametro circumferatur: ita ut ipſa diameter
k ſit axis: figura à ſectione coni rectanguli deſcripta conoides uocetur. Et ſi conoides planum contingat: ipſi autem contingenti plano æqui

diſtans

diſtans alterum planum ducatur, quod abſcindat portionem conoidis: abſciſſæ portionis baſis uocetur planum abſcindens; uertex autem punctum, in quo alterum planum conoides contingit. Quòd ſi dicta figura ſecetur plano ad rectos angulos ſuper axem ducto: ſectionem eius circulum eſſe, manifeſtum eſt. portionem uero abſciſſam ſeſquialteram eſſe coni baſim habentis portioni eandem, & æqualem altitudinem, hoc demonſtrare oportet. Et ſi conoidis duæ portiones abſcindautur planis quomodocunque ductis: ſectiones quidem eſſe conorum acuti angulorum ſectiones, perſpicuum eſt, dummodo ne plana abſcindentia ſint ad rectos angulos ſuper axem ducta. ſed portiones habere inter ſe proportionem eandem, quam habent poteſtate lineæ ab earum uerticibus uſque ad abſcindentia plana æquidiſtantes axi ductæ, illud quoque demonſtrare oportet. Horum autem demonſtrationes nondum ad te mittuntur. Poſtremo de linea ſpirali hæc propoſita erāt. eſt enim hoc tanquam aliud problematum genus, nihil cum prædictis commune habens; de quibus in hoc libro tibi demonſtrationes conſcripſimus. Si recta linea in plano, manente altero termino æqueuelociter circunducta, rurſus reſtituatur in eum locum; à quo primum cœpit moueri; & unà cum linea circunducta punctum feratur æqueuelociter ipſum ſibi ipſi in eadem linea, incipiens à termino manente: eiuſmodi punctum ſpiralem lineam in plano deſcribet. Dico iam ſpatium contentum linea ſpirali, & recta p
in priſtinum locum reſtituta, tertiam partem eſſe circuli deſcripti, centro quidem puncto manente, interuallo autem, ea lineæ rectæ parte, quæ à puncto fuerit in una circulatione permeata. Si lineam q
ſpiralem recta linea contigerit in ultimo ipſius ſpiralis termino; alia autem recta à puncto manente ducatur perpendicularis ſuper lineam circunductam, reſtitutamq; in priorem locum: ita ut cum contingente coeat: Dico hanc lineam circumferentiæ circuli eſſe æqualem. Si r
linea circunducta, punctumq; in ea latum pluribus circulationibus circumferantur; & rurſus in locum, à quo moueri cœperant, reſtituantur: Dico ſpatii linea ſpirali in ſecunda circulatione contenti, duplum quidem eſſe, quod in tertia circulatione continetur; quod uero in quarta triplum, quod in quinta quadruplum, & ita ſemper ſpatia in poſterioribus contenta circulationibus, ſecundum numeros conſequentes, multiplicia erunt ſpatii contenti in ſecūda circulatione. et quod in prima circulatione continetur ſpatiū, ſexta pars erit ſpatii in ſecunda circulatione contenti. Si in linea ſpirali in una circu ſ
latione deſcripta duo puncta ſumantur; & ab eis ducantur rectæ li-

neæ

neæ ad manentem lineæ circunductæ terminum : deſcribātur q; duo circuli, centro quidem puncto manente, interuallis uero rectis lineis ad manentem lineæ terminum ductis : & earum linearum minor producatur. Dico ſpatium contentum circumferentia illa maioris circu li, quæ in eadem parte eſt, in qua linea ſpiralis, mediaq; inter lineas habetur; & contentum linea ſpirali, & recta producta; ad ſpatiū con tentum circumferentia minoris circuli, eademq; linea ſpirali, & recta terminos earum iungente, eandem proportionem habere, quam habet ſemidiameter minoris circuli cum duabus tertiis exceſſus, quo ſemidiameter maioris circuli excedit ſemidiametrum minoris; ad ſemidiametrum minoris unà cum tertia dicti exceſſus parte. Horum igitur, & aliorum circa ſpiralem lineam demonſtrationes à me in hoc libro ſunt conſcriptæ. præmittuntur uero, ſicut in aliis geometricis, quædam ad eorum demonſtrationem neceſſaria. & ſumo in his quoque ea, quæ in aliis libris ſumpta ſunt, Videlicet linearum inæqualium, & ſpatiorum inæqualium, id, quo maius excedit minus ſibi ipſi coacceruatum, fieri poſſe, ut quamlibet propoſitam quantitatem excedat earum, quæ ad ſe ſe indicem referuntur.

## PROPOSITIO I.

SI in quapiam linea punctum feratur æqueuelociter ipſum ſibi ipſi : & in ea ſumantur duæ lineæ : habebunt illæ eandem inter ſe proportionem, quam habent tempora, in quibus punctū lineas pertranſiuit.

Feratvr enim aliquod punctum in linea a b æqueuelociter : & in ipſa ſumantur duæ lineæ c d, d e : ſitq; tempus f g, in quo punctum lineam c d pertranſiuit; in quo autem pertranſiuit d e, ſit g h. Oſtendendum eſt, lineam c d ad d e eandem habere proportionem, quam tempus f g ad ipſum g h. componantur enim ex lineis c d, d e ipſæ a d, d b lineæ ſecundum quamlibet compoſitionem : ita ut a d ipſam d b excedat. & quoties quidem ſumitur linea c d in a d, toties ſumatur tẽpus f g in tempore l g. quoties autem ſumitur d e in d b, toties tempus g h ſumatur in g k tempore. Quoniam ergo ponitur punctum in linea a b æqueuelociter ferri : cònſtat in quanto tempore lineam c d pertranſiuit, in tanto & quàmlibet pertranſiſſe earum, quæ ſunt æquales ipſi c d. Quare & compoſitam lineam a d in tanto tempore pertranſiuit, quantum eſt l g tempus : cum toties ſumatur c d linea in ipſa a d, quoties f g tempus in tempore l g. Eadem quoque ratione & lineam d b pertranſiuit in tanto tempore, quantum eſt g k tempus. Et quoniam maior eſt a d linea ipſa b d : manifeſtū eſt in maiori tempore punctum lineam a d pertranſire, quàm ipſam b d. quare tempus l g maius eſt tempore g k. ſimiliter autem oſtendetur, et ſi ex tẽporibus f g, g h, componantur

Ponantur tempora ſecundum quamlibet compoſitionem, ut alterum excedat alterum, & compoſitis ex c d, d e lineis ſecundum eandem compoſitionem, alteram excedere alteram, eodem ordine ſumptas ipſis temporibus. patet igitur eandem habere proportionem c d ad ipſam d e, quam tempus f g ad tempus, g h.

## PROPOSITIO II.

SI duo puncta in duabus lineis ferantur, unumquodque ſibi ipſi æqueuelociter: ſumantur autē in utraque ipſarum duæ lineæ primæ, quæ ſcilicet in temporibus æqualibus à punctis fuerunt permeatæ: & item ſecundæ: habebunt ſumptæ lineæ eandem inter ſe proportionem.

FERATVR in linea a b aliquod punctum æqueuelociter ipſum ſibi ipſi; & alterū feratur in linea k l. ſumantur aūtem in ipſa a b duæ lineæ c d, d e: & in linea k l itē duæ f g, g h: & in tanto tempore punctum in linea a b latū pertranſeat ipſam c d, in quanto alterum latum in k l pertranſit lineam f g, ſimiliter & lineam d e in tanto tempore punctum pertranſeat, in quanto alterum ipſam g h. oſtendendum eſt, eandem habere proportionem c d ad d e, quam f g, ad g h. Sit enim tempus m n, in quo punctum lineam c d pertranſiuit. in hoc autem & alterum punctum pertranſit ipſam f g. rurſus in quo lineam d e punctum pertranſiuit, ſit tempus n x, in eodemq; alterum punctum pertranſit g h. Eandem ergo proportionem habebit linea c d ad lineam d e, quam tempus m n ad tempus n x. et linea f g ad lineam g h habebit eandem, quam tempus m n ad ipſum n x. manifeſtum eſt igitur eādem habere proportionem c d ad d e, quam habet f g ad g h.

## PROPOSITIO III.

CIrculis quotcunque datis fieri poteſt, ut recta linea ſumatur, quæ circulorum circumferentiis maior exiſtat.

CIRCVMSCRIPTA enim circa unumquenque circulorum figura multiangula, perſpicuum eſt, lineam ex omnibus earum lateribus compoſitam, omnibus circulorum circumferentiis maiorem eſſe.

## PROPOSITIO IIII.

DVabus datis lineis inæqualibus, recta uidelicet, & circuli circumferentia, ſumi poteſt recta linea, maiore quidem datarum linearum minor, minore uero maior.

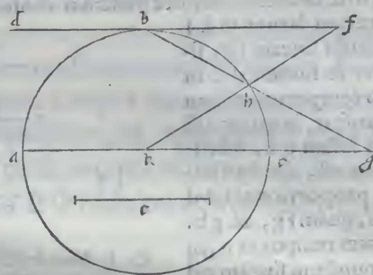
DIVISA etenim recta linea in tot partes æquales, quoties exceſſus, quo maior ſuperat minorem, ſibi ipſi coaceruatus excedat eandem rectum; erit pars una

ipsius excessu minor: si autem circumferentia sit maior recta linea; una parte ipsi rectæ adiecta, manifestum est, eam minore datarum linearum maiorem esse, maior e uero minorem; nam quæ adiicitur pars, minor est ipso excessu.

## PROPOSITIO V.

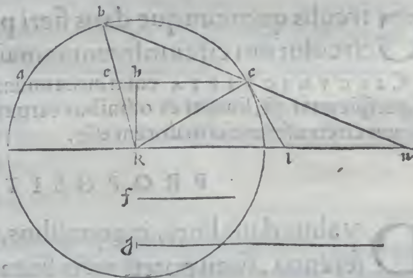
Circulo dato, & linea recta circulum contingente, potest à centro circuli duci recta linea ad contingentem: ita ut eius pars, quæ media interiicitur inter contingentem, & circuli circumferentiam, ad semidiametrum minorem habeat proportionem, quàm circumferentia circuli inter tactum, & lineam ductam interiecta ad datam quamlibet circuli circumferentiam.

Sit circulus a b c datus, cuius centrum k: & d f linea tangat circulum in b puncto: sit data etiam quælibet circuli circumferentia. Itaque sumi potest recta linea
A maior data circumferentia, quæ sit e. ducatur autem per centrum linea a g, æquidistans lineæ d f: ponaturq; ipsi e æqualis g h, tendens ad b; & à centro k ducta ad h, producatur usque ad f.
B Eandem ergo proportionem habet h
C f ad h k, quam b h ad h g. quare f h ad h k minorem habet, quam b h circumferentia ad datam circumferentiam; quoniam b h recta minor est circumferentia b h: ipsa autem g h maior est data circumferentia. minorem igitur proportionem habet & f h ad semidiametrum, quàm b h circumferentia ad datam circumferentiam.




## PROPOSITIO VI.

Circulo dato, & in eo data linea, quæ sit minor diametro, potest à centro circuli ad circumferentiam ipsius recta linea duci. secans lineam in circulo datam: ita ut eius pars inter circumferentiam, & datam lineam interiecta, ad lineam, quæ iungit lineæ ductæ terminum ad circumferentiam, & terminum lineæ in circulo datæ, habeat quamlibet propositam proportionem; si modo proportio illa minor sit proportione, quam habet dimidia lineæ in circulo datæ ad lineam, quæ à centro ad ipsam perpendiculariter sit educta.

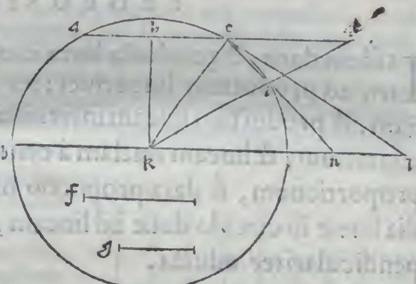



Sit circulus a b c datus, cuius centrum k: & in ipso data recta linea c a minor diametro: & proportio, quam habet f, ad g minor sit ea, quam c h habet ad k h, perpendiculari existente ipsa k h. ducatur autem

autem à centro linea $kn$ æquidistans lineæ a c : & ad angulos rectos ipsi $k$ c ducatur c
l. erunt triangula c h $k$, c $k$ l similia : & idcirco ut c h ad h $k$, ita k c ad c l. minorem A
igitur proportionem habet f ad g, quàm k ad c l. quam uero proportionem habet B
f ad g, habeat k c ad maiorem ipsa c l, hoc est ad b n : & ponatur b n inter circumfe C
rentiam, & rectam lineam, ut transeat per c : ita enim secari poterit, & cadet extra,
cum ipsa sit maior, quàm c l. Quoniam igitur k b ad b n eandem habet proportio D
nem, quam f ad g : & ipsa e b ad b c habebit eandem, quam f ad g.

## PROPOSITIO VII.

Iisdem, quæ supra datis, & producta recta linea in circulo data, potest à circuli centro ad productam linea duci : ita ut pars eius, quæ inter circumferentiam, & productam interiicitur, ad lineam iungentem terminos interiectæ, & productæ lineæ, habeat quamlibet datam proportionem ; dummodo data proportio sit maior ea, quam habet dimidia lineæ in circulo datæ ad lineam, quæ à centro ad ipsam sit perpendiculariter educta.



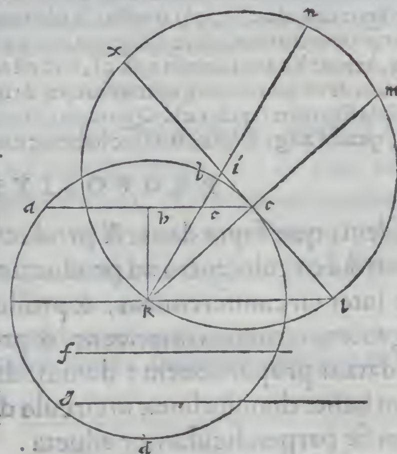

Sint data eadem, quæ superius: & recta linea, quæ in circulo data est, producatur. data autem proportio sit, quam habet f ad g, maior proportione c h ad hk. maior igitur erit & ea, quam habet k c ad c l. quam uero A
proportionem habet f ad g, eam habebit k c ad minorem ipsa c l. habeat B
ad i n, quæ tendat ad c : potest enim C
ita secari, & cadet intra lineam c l, D
quòd minor sit, quàm ipsa c l. Quoniam igitur eandem habet proportionem k c ad i n, quam f ad g, habebit & ipsa e i ad i c eandem, quam f ad g.

## PROPOSITIO VIII.

Circulo dato, & in circulo linea, quæ sit diametro minor, data itē altera linea circulum contingente in termino lineæ datæ, potest à circuli centro linea duci ad rectam lineam : ita ut pars ipsius, quæ est inter circumferentiam, & lineam in circulo datam, ad partem illam lineæ contingentis, quæ linea ipsa à centro ducta, & puncto contactus continetur, habeat quamlibet datam proportionem ; si modo data proportio minor sit ea, quam habet dimidia lineæ in circulo datæ ad lineam, quæ à centro ad ipsam sit perpendiculariter educta.

Sit datus circulus, a b c d : & in circulo data linea c a diametro minor: tangatq; x l circulum in c : & proportio f ad g sit minor eà, quam habet c h ad h $k$, erit & minor ea, quam habet c $k$ ad c l, si $k$l ducta sit æquidistans ipsi h c. Itaque habeat $k$ c ad c x eandem proportionem, quam f ad g. maior ergo est linea x c ipsa c l. describatur circuli circumferentia per puncta $k$l x. Et quoniam maior est x c ipsa, c l : & li-

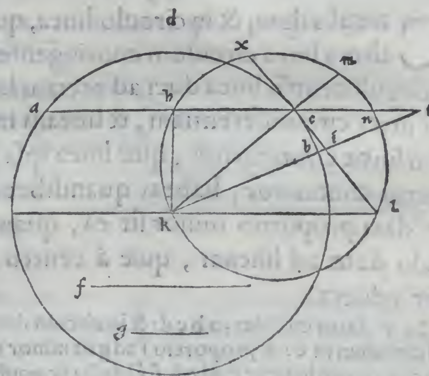
neæ kc, xl, ſecant ſeſe ad angulos rectos: fieri poteſt, ut ducatur linea in, æqualis ipſi mc, quæ tendat ad k. Rectangulum igitur contentum lineis xi, il ad id, quod continetur ke, il
D eandem habet proportionem, quam xi ad ke; & quod continetur lineis ki, in ad contentum ipſis ki, cl habet eandem, quam in ad cl. quare & in ad cl eſt, ut xi ad ke: & propterea cm ad cl, & xc ad kc, & ad kb eſt, ut xi ad ke: & reliqua ic ad be eandem habet proportionem, quam xc ad kc, & quam g ad f. incidit igitur kn, in contingentem; & eius pars, quæ eſt inter circunferentiam, & lineam rectam; uidelicet be ad partem contingentis inter Kn; & contactum; eam habet proportionem, quam f ad g.




## PROPOSITIO IX.

Iſdem datis, & producta linea in circulo data, poteſt à circuli centro ad productam linea duci: ita ut pars eius inter circumferentiam, & productam lineam interiecta, ad partem contingentis inter contactum, & lineam ductam à centro, habeat quamlibet datam proportionem, ſi data proportio maior ſit ea, quam habet dimidia lineæ in circulo datæ ad lineam, quæ à centro ad ipſam ſit perpendiculariter educta.

Sit datus circulus. abcd: & in circulo data recta linea ca, minor diametro producatur: linea autem xc tangat circulum in c: & proportio, quam habet f ad g maior ſit ea, quam habet ch ad hk. erit ergo & ea maior, quam habet kc ad cl. Itaque habeat kc ad cx eandem proportionem, quam f ad g. minor erit cx ipſa cl. Rurſus deſcribatur circulus per puncta xkl. Quoniam igitur xc minor eſt cl: & ipſæ km, xc ſecant ſeſe ad angulos rectos: poterit duci linea in æqualis lineæ cm; quæ tendat ad k. Et quoniam rectangulum, quod lineis xi, il continetur, ad rectangulum contentum ipſis li, ke eſt, ut xi ad ke: contento autem lineis xi, il æquale eſt contentum ki, in: & contento li, ke æquale contentum ki, cl; propterea quòd eſt, ut ke ad lc, ita ki ad li: erit & ut xi, ad ke, ita rectangulum lineis ki, in contentum, ad contentum ipſis ki, cl: hoc eſt, ut ni ad

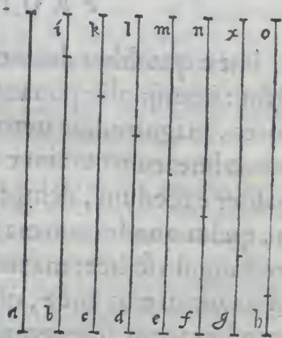


c l: hoc eſt c m ad c l. eſt autem & ut c m ad c l, ita x c ad c k, hoc eſt ad k b. Vt ergo x i ad k e, ita x c ad k b; & reliqua i c ad reliquam b e, eſt ut x c ad c k. Quam uero proportionem habet x c ad c k, eam habet g ad f. inciditq; k e in productam lineam, & b e inter ipſam, & circumferentiam interiecta ad partem contingentis c i, inter contactum, & ipſam k e, eandem habet proportionem, quam f ad g.

## PROPOSITIO X.

SI lineæ quotlibet, quæ ſe ſe æqualiter excedant, deinceps ponantur: ſitq; exceſſus minimæ earum æqualis: & aliæ item ponantur lineæ, numero quidem æquales prædictis, magnitudine uero unaquæque æqualis maximæ: quadrata illarum omnium, quæ maximæ æquales ſunt unà cum quadrato maximæ, & rectangulo minima linea, & linea æquali omnibus ſe ſe æqualiter excedentibus contento, tripla erunt quadratorum linearum ſe ſe æqualiter excedẽtium.

SINT lineæ quotlibet deinceps poſitæ, quæ ſe ſe æqualiter excedant a b c d e f g
h: & ſit h æqualis exceſſui. adiiciatur uero ad b linea i æqualis ipſi h: & ad c adiicia-
tur k æqualis g: & ad d ipſa l æqualis f: & ad e, m æqualis e: & ad f, n æqualis d: & ad
g, x æqualis c: & denique ad h adiiciatur o æqualis ipſi b. erunt ſic factæ magnitudi-
nes, inter ſe æquales; & item æquales maximæ. oſtendendum eſt igitur, quadrata,
omnium, uidelicet ipſius a, & factarum linearum unà cum quadrato a, & rectangu-
lo contento linea h, & linea æquali his omnibus a b c d e f g h tripla eſſe quadrato-
rum omnium a b c d e f g h. eſt enim quadratum b i æquale quadratis i, b; & duobus A
quæ b, i continentur rectangulis. quadratum
uero k c eſt æquale quadratis k, c; & duobus iis,
quæ k, c continẽtur. Similiter & quadrata alia-
rum, quæ ſunt æquales ipſi a, æqualia erunt qua
dratis ſuarum partium, & duobus rectangulis,
quæ eiſdem partibus continentur. Quadrata B
igitur a b c d e f g h, & quadrata i k l m n x o, unà
cum quadrato a, dupla ſunt quadratorum a b c
d e f g h. Quod autem reliquum eſt, oſtende- C
mus, uidelicet dupla eorum, quæ partibus u-
niuſcuiuſque lineæ æqualis ipſi a continentur,
unà cum eo, quod continetur h linea, & linea
æquali omnibus a b c d e f g h, æqualia eſſe qua-
dratis a b c d e f g h. Quoniam enim duo, quæ
lineis b, i continentur, æqualia ſunt duobus D
contentis b, h: & duo, quæ continentur k, c E
æqualia ſunt contento h, & quadrupla ipſius c,
quòd k dupla eſt ipſius h: duo autem contenta
d, l ſunt æqualia contento h, & ſexcupla d, quòd l eiuſdem h eſt tripla: ſimiliter et a-
lià dupla eorum, quæ partibus continentur, æqualia ſunt contento h, & multiplici
ſemper ſecundum numeros deinceps pares ſequentis lineæ: erunt omnia rectangula F
unà cum eo, quod continetur linea h, & linea æquali omnibus a b c d e f g h, æqualia
contento linea h, & linea æquali his omnibus, uidelicet ipſi a, & triplæ b, & quin-
tuplæ c, & ſemper impari ſecundum numeros deinceps impares, multiplices lineæ
ſequentis. Sunt autem & quadrata ipſarum a b c d e f g h æqualia contento iiſdem li
neis: nam quadratum a eſt æquale contento h linea, & linea æquali his omnibus, ui- G
delicet ipſi a & reliquis, quarum unaquæque eſt æqualis ipſi a; æqualiter enim h me-




titur

titur ipſam a, atque a metitur omnes ſibi æquales. quare quadratum a eſt æquale cõtento linea h, et linea æquali ipſi a, et duplæ linearum b c d e f g h: quoniam quæ ſunt æquales ipſi a omnes excepta a duplæ ſunt linearum b c d e f g h. ſimiliter et quadratum b æquale eſt contento linea h, et linea æquali ipſi b, et duplæ linearum c d e f g h. et rurſus quadratum c eſt æquale contento linea h et æquali ipſi c, et duplæ ipſarum d e f g h. Eadem ratione et aliarum quadrata omnium æqualia ſunt contentis lin ea h, et linea ipſi æquali, et duplæ reliquarum. manifeſtum eſt igitur, quadrata o mnium æqualia eſſe ei, quod continetur linea h, et linea æquali his omnibus, uidelicet ipſi a, et triplæ b, et quintuplæ c, et ſecundum numeros deinceps impares, multiplici ſequentis lineæ.

H Ex quibus colligitur, quadrata omnia linearum æqualium maxi-
mæ, quadratorum quidem linearum ſe ſe æqualiter excedentium,
minora eſſe, quàm tripla; quoniam aſſumptis quibuſdã tripla ſunt:
I reliquorum autem, dempto maximæ quadrato maiora, quàm tri-
pla; quoniam aſſumpta minora ſunt, quàm tripla quadrati maximæ.
K Et propterea ſi ſimiles figuræ deſcribantur ab omnibus; & ab iis, quæ
ſe ſe æqualiter excedunt; & ab iis, quæ ſunt æquales maximæ: quæ
ab iis deſcribuntur, quæ ſunt æquales maximæ, earum quidem, quæ
ab iis, quæ ſe ſe æqualiter excedunt, minores erunt, quàm triplæ; reli
quarum uero, dempta ea, quæ à maxima deſcribitur, maiores, quàm
triplæ: ſimiles nanque figuræ eandem inter ſe ſe, quam quadrata
proportionem habent.

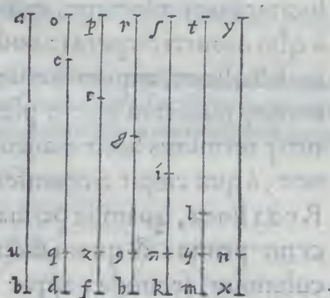
## PROPOSITIO XI.

SI lineæ quotlibet deinceps ponantur, quæ ſe ſe æqualiter excedant: itemq; aliæ ponantur lineæ, numero quidem prædictis una minores, magnitudine uero unaquæque æqualis maximæ: quadrata omnia linearum maximæ æqualium ad quadrata earum, quæ ſe ſe æqualiter excedunt, dempta minima, minorem habent proporrionem, quàm quadratum maximæ ad id, quod utriſque his eſt æquale; rectangulo ſcilicet maxima, minimaq; linea contento, & tertiæ parti quadrati eius lineæ, qua maxima minimam excedit; ad quadrata uero linearum ſe ſe æqualiter excedentium dempto eo, quod à maxima fit, maiorem proportionem habent, quam ſit eadem illa proportio.

SINT enim lineæ quotlibet deinceps poſitæ, quæ ſe ſe æqualiter excedant. a b quidem excedens c d: c d uero excedens e f: et e f, g h: et g h, i k: et i k, l m: et l m, n x. adiiciatur quoque ad ipſam c d, linea c o, æqualis uni exceſſui: et ad ipſam e f adiiciatur e p duobus exceſsibus æqualis: et ad g h æqualis tribus g r: & ad alias eodem modo. erunt igitur lineæ, quæ fiunt, inter ſe ſe æquales, & item æquales maximæ. Itaque, oſtendendum eſt, quadrata omnia factarum linearum, ad quadrata earum, quæ ſe ſe æqualiter excedunt, dempto quadrato n x, minorem habere proportionem, quàm quadratum a b ad i d, quod eſt æquale utriſque; et rectangulo conten

to

to lineis a b, n x; & tertiæ parti quadrati ipſius n y; ad quadrata uero earundem linearum, dempto quadrato a b, maiorem proportionem habere, quàm ſit dicta proportio. dematur ex unaquaque earum, quæ ſe ſe æqualiter excedunt, linea exceſſui æqualis. Ergo quam proportionem habet quadratum a b ad hæc utraque; ad rectangulum contentum lineis a b, u b; & ad tertiam partem quadrati a u, eandem habet o d quadratum ad contentum ipſis o d, d q; & tertiam partem quadrati q o: & quadratũ p f ad contentum p f, z f; & tertiam partem quadrati z p: & quadrata aliarum ad ſpatia ſimiliter ſumpta. Quare & omnia quadrata linearum o d, p f, r h, ſ k, t m, y x, ad omnia contenta linea n x, & æquali omnibus dictis lineis; & ad tertias partes quadratorum o q, p z, r ϑ, ſ λ, t μ, y n, eandem habebunt proportionem, quam a b quadratum ad utraque; ad contentum lineis a b, u b; & ad tertiam partem quadrati u a. Si igitur oſtendatur, contentum linea n x, & æquali omnibus o d, p f, r h, s k, t m, y x, & tertias partes quadratorum o q, p z, r ϑ, ſ λ, t μ, y n; quadratis quidem a b, c d, e f, g h, i k, l m, minora eſſe; quadratis uero c d, e f, g h, i k; l m, n x, maiora: quod proponebatur, iam oſtenſum erit. Itaque contentum linea n x, & æquali omnibus o d, p f, r h, s k, t m, y x, et tertiæ partes quadratorum o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n; hæc (inquam) omnia, æqualia ſunt quadratis q d, z f, ϑ h, λ k, μ m, n x; contentoq́; linea n x, et æquali omnibus o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n; et tertiæ parti quadratorum o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n. quadrata uero, a b, c d, e f, g h, i k, l m, æqualia ſunt quadratis b u, q d, z f, ϑ h, λ k, μ m; & quadratis a u, c q, e z, g ϑ, i λ, l μ; et contento linea b u, et dupla ipſarum a u, c q, e z, g ϑ, i λ, l μ. communia igitur utriſque ſunt quadrata linearum æqualium ipſi n x. contentum autem linea n x, et æquali omnibus o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n, minus eſt contento b u, et dupla linearum a u, c q, e z, g ϑ; i λ, l μ: propterea quòd lineæ proximæ dictæ æquales ſunt ipſis c o, e p, r g, i μ, l t, y n: reliquis uero maiores. et quadrata a u, c q, e z, g ϑ, i λ, l μ, maiora ſunt tertia parte quadratorum o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n: hoc enim in ſuperioribus fuit oſtenſum. minora igitur ſunt prædicta ſpatia quadratis a b, c d, e f, g h, i k, l m. Quod autem reliquum eſt, oſtendemus: maiora ſcilicet eſſe quadratis c d, e f, g h, i k, l m, n x. Rurſus quadrata c d, e f, g h, i k, l m, n x, æqualia ſunt quadratis c q, e z, g ϑ, i λ, l μ; & quadratis q d, z f, ϑ h, λ k, μ m, n x; et contento n x, & dupla linearum omnium c q, e z, g ϑ, i λ, l μ. ſuntq́; communia quadrata q d, z f, ϑ h, λ k, m μ, n x: & cõtentum linea n x, & æquali his omnibus o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n, maius eſt contento n x, et dupla ipſarum c q, e z, g ϑ, i λ, μ l. ſunt autem et quadrata q o, z p, ϑ r, λ s, μ t, y n, quadratorum c q, e z, g ϑ, i λ, l μ, maiora, quàm tripla, ut oſtenſum eſt. maiora igitur ſunt dicta ſpatia quadratis c d, e f, g h, i k, l m, n x: quod fuerat oſtendendum.




Et ſi ſimiles figuræ deſcribantur ab omnibus, & ab iis, quæ ſe ſe æqualiter excedunt, & ab iis, quæ ſunt æquales maximæ: figuræ omnes, quæ ab iis, quæ maximæ ſunt æquales ad figuras, quæ à ſe ſe æqualiter excedentibus deſcribuntur, dempta ea, quæ à minima, proportionem habebunt minorem, quàm quadratum maximæ ad id, quod utriſque eſt æquale; rectangulo maxima, minimaq́; contento; & tertiæ parti quadrati exceſſus, quo maxima minimam excedit; ad

figuras

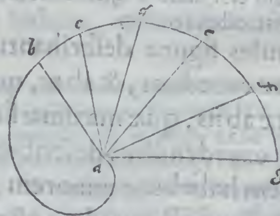
figuras uero eaſdem, dempta ea, quæ à maxima, proportionem habebunt dicta proportione maiorem: ſimiles enim figuræ eandem, quam quadrata, proportionem habent.

Si recta linea in plano ducta, manente altero eius termino æqueuelociter circumferatur, quouſque rurſus in eum locum reſtituatur, à quo moueri cœperat: eodemq; tempore aliquod punctum feratur in dicta linea, æqueuelociter ipſum ſibi ipſi, incipiens à termino manente, punctum hoc in plano ſpiralem lineam deſcribet. Voceturq; terminus lineæ manens, principium lineæ ſpiralis. Poſitio lineæ, à qua cœpit circumferri, principium circulationis dicatur. Recta linea, quam in prima circulatione punctum pertranſiuit, uocetur prima: & quam dictum punctum pertranſiuit in ſecunda circulatione, ſecunda: atque aliæ ſimiliter eodem nomine uocentur, quo & ipſæ circulationes. Spatium contentum ſpirali linea in prima circulatione deſcripta, & linea recta, quæ prima eſt, primum dicatur. contentum uero linea ſpirali in ſecunda circulatione, & ſecunda linea, ſecundum: & alia eodem modo. Si à puncto, quod eſt principium lineæ ſpiralis, ducatur aliqua linea recta: huius ipſius lineæ, quæ ſunt ad partes, in quibus circulatio fit, præcedentia dicantur: quæ uero ad alteras, ſequentia. Circulus deſcriptus, centro quidem puncto, quod eſt principium lineæ ſpiralis; interuallo autem recta linea prima, primus uocetur: & deſcriptus eodem centro, & linea dupla primæ, ſecundus: & alii deinceps eodem modo.

## PROPOSITIO XII.

SI ad ſpiralem lineam in una circulatione deſcriptam, à principio ipſius quotlibet rectæ lineæ ducantur, quæ æquales angulos ad inuicem efficiant: ipſæ ſeſe æqualiter excedunt.

SIT ſpiralis linea, in qua a b, a c, a d, a e, a f, lineæ rectæ, quæ æquales angulos efficiant ad inuicem: Oſtendendum eſt, lineam a c æqualiter excedere a b: atque a d ipſam a c: & aliæ ſimiliter. In quo nanque tẽpore linea circũlata ex a b peruenit ad a c; in hoc punctum in linea recta latum, exceſſum pertranſit, quo linea c a excedit a b. & in quo tempore ex a c ad a d; in eodem pertranſit exceſſum, quo a d excedit a c. In æquali autem tempore linea circũlata ex a b peruenit ad a c: & ex a c ad a d: propterea, quòd anguli ſunt æquales. ergo in æquali tempore punctum in linea recta latum pertranſit exceſſum,



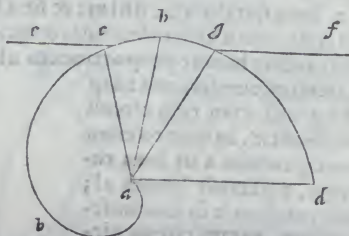

quo

quo linea a c ipſam a b excedit; & exceſſum, quo a d excedit a c. Quare æqualiter a c excedit ipſam a b, atque a d ipſam a c: & ſimiliter reliquæ.

## PROPOSITIO XIII.

SI lineam ſpiralem contingat recta linea, in uno tantum puncto contingit.

SIT linea ſpiralis, in qua a b c d: ſitq; eius principium punctum a: principium circulationis recta linea a d: & contingat lineam ſpiralem ipſa f e. Dico in uno tantum puncto eam contingere. Si enim fieri poſsit, contingat in duobus punctis c g: iunganturq; a c, a g: & angulus lineis a g, a c cōtentus bifariam diuidatur: in quo autem puncto linea bifariam diuidens angulum, occurrit ſpirali lineæ, ſit h. Aequaliter igitur a g excedit a h, atque a h ipſam a c: quoniam æquales inter ſeſe angulos continent: & idcirco a g, a c ſunt ipſius a h duplæ. Sed eius lineæ, quæ in triangulo bifariam diuidit angulum c a g, ipſæ a g, a c maiores ſunt, quàm duplæ. conſtat ergo punctum, in quo recta linea a h occurrit lineæ c g, cadere inter puncta a h. Quare ipſa e f ſecat lineam ſpiralem; cum aliquod punctum eorum, quæ ſunt in linea c g intra ſpiralem contineatur. poſitum autem fuerat eam contingere. In uno igitur tantum puncto ipſa e f ſpiralem lineam contingit.

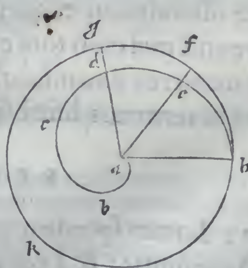



A
B

## PROPOSITIO XIIII.

SI in lineam ſpiralem in prima circulatione deſcriptam, incidant duæ rectæ lineæ à puncto, quod eſt ipſius principium ductæ: & producantur ad primi circuli circumferentiam: eandem inter ſe proportionem habebunt lineæ in ſpiralem lineam incidentes, quam circumferentiæ circuli inter terminum lineæ ſpiralis, & terminos linearum ad circumferentiam productarum, interiectæ; circumferentias à termino lineæ ſpiralis uerſus præcedentia ſumendo.

SIT linea ſpiralis a b c d e h in prima circulatione deſcripta, cuius principium ſit punctum a: principium circulationis linea recta a h: & h k g ſit circulus primus. Incidant autem ab a puncto ad lineam ſpiralem rectæ lineæ a e, a d: & producantur ad f g puncta circumferentiæ circuli. oſtendendum eſt eandem habere proportionem lineam a e ad ipſam a d, quam circumferentia h k f ad h k g circumferentiam. circumducta enim linea a h, conſtat punctum quidem h æquali uelocitate pertranſiſſe circumferentiam circuli h k g; punctum autem a in linea recta latum pertranſiſſe ipſam a h. itemq; punctum h pertranſiſſe h k f circumferentiã: & punctum a rectam lineam a e. & rurſus punctum a lineam a d: & h circumferen-

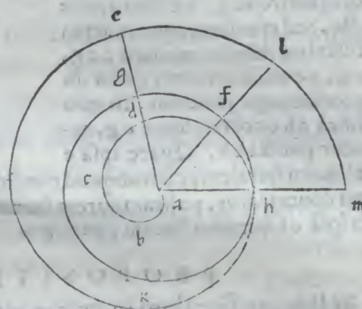


tiam h k g, utrunque æqueuelociter ipsum sibi ipsi latum. Quare eundem habebit proportionem a e ad a d, quam circumferentia h k f ad h k g circumferentiam: hoc enim in superioribus est demonstratum. similiter quoque demonstrabitur idem contingere, et si alia incidentium linearum in terminum lineæ spiralis inciderit.

## PROPOSITIO XV.

SI in lineam spiralem in secunda circulatione descriptam, incidant rectæ lineæ à principio ipsius spiralis ductæ: eandem inter se se habebunt rectæ lineæ proportionem, quam dictæ circumferentiæ unà cum tota circuli circumferentia.

Sit linea spiralis a b c d h l m: & sit a b c d h quidem in prima circulatione descripta; ipsa uero h e l m in secunda: & incidant in eam rectæ lineæ a e, a l. ostendendum est eandem habete proportionem a l ad a e, quam circumferentia h k f unà cũ tota circuli circumferentia ad ipsam h k g unà cum tota circuli circumferentia. In quanto enim tempore punctum a in linea recta latum, pertransit lineam a l; in tanto punctum h in circumferentia latum, totam circuli circumferentiam pertransit, & insuper circumferentiam h k l. & rursus a punctum pertransit lineam a e; & h totam circuli circumferentiam unà cum circumferentia h k g, utrunque æqueuelociter ipsum sibi ipsi latum. Quare constat eandem habere proportionem a l ad a e, quam circumferentia h k f unà cum tota circuli circumferentia, ad circumferentiam h k g unà cum tota circuli circumferentia.




Eodem modo ostendetur, & si in lineam spiralem in tertia circulatione descriptam, rectæ lineæ inciderint, eandem habere proportionem inter se se, quam dictæ circumferentiæ unà cum tota circuli circumferentia bis sumpta. Similiter autem & in alias spirales incidentes lineæ ostendentur eandem proportionem habere, quam dictæ circumferentiæ unà cum tota circuli circumferentia toties sumpta, quantus est numerus uno minor, quàm sint ipsæ circulationes; etiam si utraque in terminos lineæ spiralis inciderit.

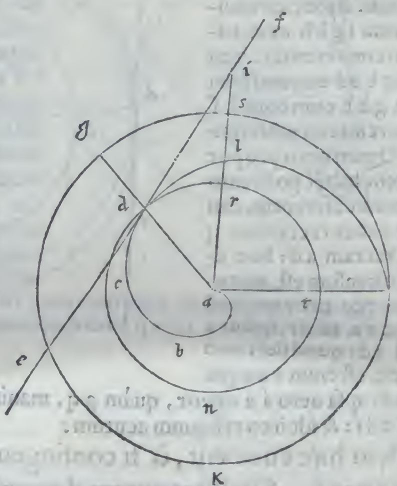
## PROPOSITIO XVI.

SI lineam spiralem in prima circulatione descriptam recta linea contingat: & à contactu iungatur recta ad punctum, quod est principium lineæ spiralis: anguli, quos facit linea contingens, cum ea,

ea, quæ iuncta eſt, inæquales erunt; & is quidem qui ad præcedentia conſtituitur, eſt obtuſus; qui uero ad ſequentia, acutus.

SIT linea ſpiralis a b c d h in prima circulatione deſcripta: & punctum a ſit ipſius principium: recta linea a h principium circulationis: & h k g circulus primus: contingat uero linea recta e d f ſpiralem lineam in d: & ab ipſo d iungatur d a. Oſtendendum eſt, d f cum d a obtuſum facere angulum. Deſcribatur enim circulus d t n, centro quidem a, interuallo autem a d. neceſſarium igitur eſt, circuli huius circumferentiam, quæ ad præcedentia habetur, intra lineam ſpiralem cadere: quæ uero ad ſequentia, extra: quoniam rectarum linearum ab a puncto ad ſpiralem lineam ductarum, quæ ad præcedentia fuerint, maiores ſunt ipſa d a; & quæ ad ſequentia, minores. Angulum uero a d f non eſſe acutum conſtat: quia maior eſt angulo ſemicirculi. Sed non eſſe rectum, ſic monſtrabitur. Sit enim, ſi fieri poteſt, rectus. ergo e d f linea circulum d t n contingit. quare ab a puncto ad contingentem poteſt recta linea duci, ita, ut eius pars, quæ inter contingentem, & circuli circumferentiam interiicitur, ad ſemidiametrum circuli minorem habeat proportionē, quàm circumferentia inter contactum, & lineam ductam interiecta ad datam circumferentiam. Itaque ducatur a i ſecans lineā quidem ſpiralem in l, circumferentiam autem circuli d n t in r: & recta linea r i ad ipſam a r minorem habeat proportionem, quàm circumferentia d r ad d n t circumferentiam. et tota igitur i a ad a r minorem proportionem habet, quàm circumferentia r d n t, ad d n t circumferentiam, hoc eſt, quàm ſ g k h circumferentia ad circūferentiam g k h. Quam uero proportionem habet ſ g k h circumferentia ad circumferentiam g k h, eandem habet recta linea a l ad rectam a d, ut oſtenſum eſt. minorem igitur proportionem habet recta linea a i ad a r, quàm l a ad a d: quod fieri minime poteſt, cum ſit r a æqualis a d, & i a maior, quàm a l. quare angulus a d f non eſt rectus. ſed neque acutus, ut oſtenſum eſt. ſequitur ergo obtuſum eſſe, & reliquum acutum. Similiter quoque oſtendetur idem euenire, & ſi contingens ſpiralem lineam, in termino ipſius contingat.

A B C D E F G




## PROPOSITIO XVII.

Si lineam ſpiralem in ſecunda circulatione deſcriptam contingat recta linea: illud idem eueniet.

CONTINGAT enim e f recta ſpiralem lineam in ſecunda circulatione deſcriptam in d puncto: & alia eadem ſuperioribus fiant. Simili ratione circumferentiæ circuli r n d partes, quæ ſunt ad præcedentia intra ſpiralem lineam cadent; quæ autem ad ſequentia, extra. quare angulus a d f non eſt rectus, ſed obtuſus. Sit enim, ſi fieri poteſt, rectus. continget ergo linea e f circulum r n d in d puncto. ducatur rurſus linea a i ad contingentem, quæ ſecet ſpiralem lineam in q, & circumferentiam circuli r n d in r. habeat autem r i ad r a proportionem minorem, quàm d r

circumferentia ad totam circumferentiam circuli d r n, & ad ipſam d n t circumferentiam: hoc enim fieri poſſe iam oſtenſum eſt. et tota igitur i a ad a r minorem proportionem habet, quàm circumferentia r d n t unà cum tota circuli circumferentia ad circumferentiam d n t unà cum tota circuli circũferentia. Sed quam proportionem habet circũferentia r n d t cum tota d n t r circuli circumferentia ad circumferentiam d n t cum tota circuli d n t r circumferentia, eam habet circumferentia ſ g k h cum tota circumferentia circuli h ſ g k ad circumferentiam g k h cum tota h ſ g k circuli circumferentia. Quam uero proportionem habẽt poſtremo dictæ circũferentiæ, eandem habet recta linea q a ad rectam a d: hoc enim oſtenſum eſt. minorem ergo proportionẽ habet i a ad a r, quàm a q ad a d: quod fieri non poteſt. eſt enim r a æqualis a d: ipſa uero i a maior, quàm a q. manifeſtum eſt igitur obtuſum eſſe angulum a d f: & idcirco reliquum acutum.

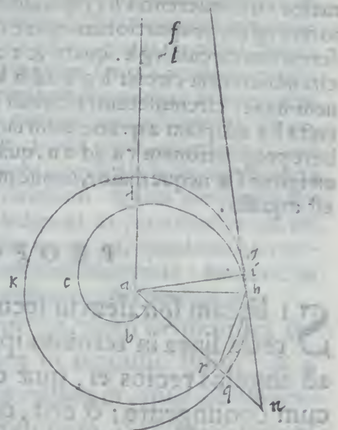
Eadem hæc euenient, & ſi contingens linea in termino lineæ ſpiralis contigerit. Similiter autem demonſtrabitur, & ſi lineam ſpiralem in qualibet circulatione deſcriptam contingat recta linea, etiam in termino ipſius, inæquales facere angulos, cum èa, quæ à contactu ad principium lineæ ſpiralis iuncta eſt: atque illum quidem, qui ad præcedentia fit, eſſe obtuſum; qui uero ad ſequentia acutum.

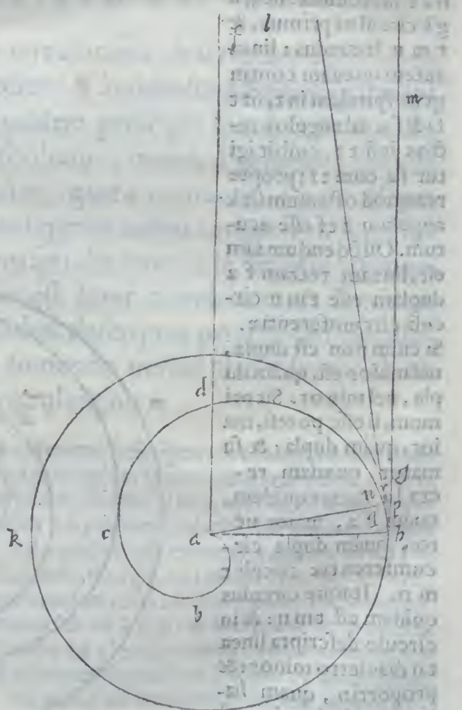
## PROPOSITIO XVIII.

Si lineam ſpiralem in prima circulatione deſcriptam recta linea contingat in termino ipſius: à puncto autem, quod eſt principium lineæ ſpiralis, ducatur linea ad rectos angulos ei, quæ eſt principium circulationis: ducta coibit cum contingente: & pars eius, quæ eſt inter contingentem, & principium lineæ ſpiralis, æqualis erit primi circuli circumferentiæ.

Sit linea ſpiralis a b c d, cuius principium punctum a: principium circulationis recta linea h a: & h g k circulus primus: contingat autem h f lineam ſpiralem in h: & ab a puncto ducatur ad rectos angulos ipſi h a linea a f. coibit ergo ipſa cum h f: quoniam lineæ f h, h a continent angulum acutum. coeat in f. Demonſtrandum eſt, lineam f a circuli h k g circumferentiæ æqualem eſſe. ſi enim non eſt
A æqualis, uel maior erit, uel minor. Sit primum maior, ſi eſſe poteſt: et ſumatur recta linea l a minor quidem, quàm f a, maior uero, quàm circumferentia circuli h k g.

h k g. Itaque circulus quidam est h g k: et in circulo linea h g diametro minor: proportioq;, quem habet h a ad a l maior est ea, quam habet dimidia g h ad lineã ab a puncto ad ipsam g h perpendiculariter ductam: quoniã & maior est ea, quam habet h a ad a f. potest igitur à puncto a duci ad productã linea a n: ita ut n r, quæ interiicitur inter circumferentiam, & lineam h n productam, eam proportionem habeat ad rectam h r, quam habet h a ad a l. quare n r ad r a eam habebit proportionem, quam h r recta ad ipsam a l. sed h r ad a l minorem proportionem habet, quàm h r circumferentia ad h g k circuli circumferentiam: recta enim linea h r minor est h r circumferentia: & a l maior circumferentia circuli h g k. minorem igitur proportionẽ habebit n r ad r a, quàm h r circumferentia ad h g k circuli circũferentiam. et idcirco tota n a ad a r minorem habebit, quàm h r circumferentia unà cum tota circuli circũferentia ad circumferentiam circuli h g k. Quam uero proportionem habet circumferentia h r, unà cum tota circuli h g k circumferentia ad circumferentiam circuli h g k, eandem habet q a ad a h: hoc enim ostensum est. minorem ergo proportionem habet n a ad a r, quàm q a ad a h: quod fieri non potest, cum n a maior sit a q, & a r æqualis ipsi h a. nõ igitur f a maior est h g k circuli circumferentia. Sed sit, si fieri potest, f a minor circumferentia circuli h g k: et rursus sumatur linea recta a l maior quidem, quàm a f; minor uero, quàm h g k circuli circumferentia: et à puncto h ducatur linea h m æquidistans ipsi a f. Rursus h g k circulus est: & in circulo linea h g diametro minor: itemq; alia circulum tangens in h: & proportio, quam habet a h ad a l minor est ea, quam dimidia g h habet ad lineam ab a puncto ad ipsam g h perpendiculariter ductam: quoniã & minor est ea, quam habet h a ad a f. potest igitur ab a puncto duci linea a p ad contingentem: ita ut r n, quæ inter rectam lineam in circulo datam, & circumferentiam interiicitur, ad lineam h p, partem scilicet contingentis inter ductam, & contactum, eandem proportionem habeat, quã h a ad a l. secet autem a p circulum in puncto r, & lineam spiralem in q. habebit & permutando eandẽ proportionem



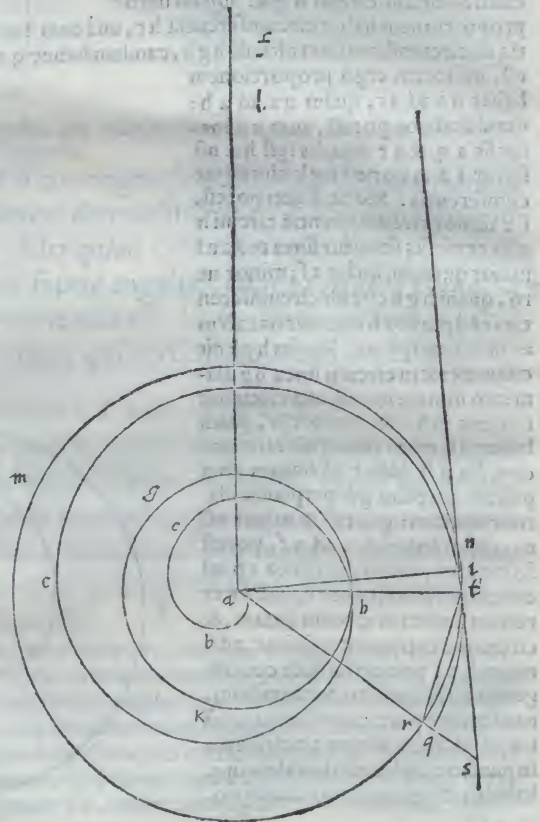



portionem n r ad r a, quam h p ad a l. sed h p ad a l maiorem proportionem habet, quàm h r circumferentia ad h g k circuli circumferentiam, cum sit h p recta
I maior circumferentia h r, ipsa autem a l minor h g k circuli circumferentia. maiorem igitur proportionem habet n r ad a r, quàm h r circumferentia ad circumferentiam circuli h g k. quare & r a ad a n maiorem habet proportionem, quàm
K circumferentia circuli h g k ad h k r circumferentiam. Quam uero proportionem habet circumferentia circuli h g k ad circumferentiam h k r, eandem habet recta h a ad ipsam a q: hoc enim iam ostensum est. ex quibus sequitur maiorem habere proportionem r a ad a n, quàm h a ad a q: quod quidem fieri non potest. nõ est igitur f a neque maior, neque minor circuli h g k circumferentia. quare eidem est æqualis.

## PROPOSITIO XIX.

Si lineam spiralem in secunda circulatione descriptam contingat recta linea in termino ipsius: & à principio spiralis ducatur linea ad angulos rectos ei, quæ est principium circulationis: coibit ipsa cum contingente; & erit, quæ inter contingentem, & principium spiralis interiicitur linea, dupla circumferentiæ secundi circuli.

Sit enim linea spiralis a b c h in prima circulatione descripta, & h e t in secunda: sitq; h g k circulus primus, & t m n secundus: linea autem quædam contingens spiralem in t, sit t f: & f a ad angulos rectos ipsi t a. coibit igitur f a cum t f; propterea quòd ostensum sit k angulum a t f esse acutum. Ostẽdendum iam est, lineam rectam f a duplam esse t m n circuli circumferentiæ. Si enim non est dupla, uel maior est, quàm dupla, uel minor. Sit primum, si esse potest, maior, quàm dupla; & sumatur quædam recta l a minor quidem, quàm f a, maior uero, quàm dupla circumferentiæ circuli t m n. Itaque circulus quidam est t m n: & in circulo descripta linea
A t n diametro minor: & proportio, quam habet t a ad a l maior est



ea, quam dimidia tn habet ad lineam ab a puncto ad ipsam tn perpendiculariter ductam. potest igitur ab a duci linea af ad tn productam: ita, ut rs, quæ inter circumferentiam, & productam interiicitur, ad tr, eandem habeat proportionem, quam ta ad al; secet enim as circulum quidem in r, spiralem uero lineam in q: & permutando eandem proportionem habebit rs ad ta, quam tr ad al. sed tr ad al minorem habet, quàm circumferentia tr ad duplum tmn circuli circumferentiæ; quoniam recta tr minor est tr circumferentia, ipsa autem al maior, quàm dupla circumferentiæ circuli tmn. minorem ergo proportionem habet rs ad ar, quàm tr circumferentia ad duplam circumferentiæ circuli tmn. quare tota sa ad ar minorem habet, quàm circumferentia tr unà cum circuli tmn circumferentia bis sumpta, ad circuli tmn circumferentiam bis sumptam. Quam uero proportionem habent dictæ circumferentiæ, eandem qa habet ad at, ut ostensum est. minorem igitur proportionem habet as ad ar, quàm qa ad ta; quod fieri non potest. non ergo fa maior est, quàm dupla tmn circuli circumferentiæ. Similiter autem ostendetur neque minor esse, quàm dupla. ex quibus constat duplam esse. B

Eodem modo ostendendum est, Si lineam spiralem in qualibet circulatione descriptam contingat recta linea in termino ipsius: & à principio spiralis ducatur linea ad angulos rectos ei, quæ est principium circulationis: coire ipsam cum contingente, & multiplicem esse circumferentiæ circuli, secundum numerum circulationis nominati eodem met numero. C

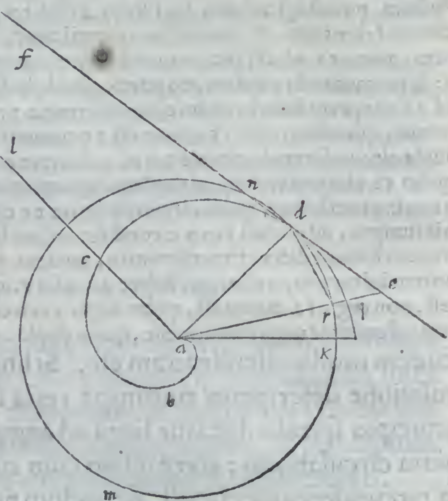
## PROPOSITIO XX.

SI lineam spiralem in prima circulatione descriptam recta linea contingat, non in termino ipsius: & à contactu ad principium spiralis linea iungatur: & centro quidem principio spiralis, interuallo autem linea iuncta, circulus describatur: itemq; à principio spiralis ducatur linea ad rectos angulos ei, quæ à contactu ad principium spiralis iuncta est: ipsa cum contingente coibit; atque erit linea inter contingentem, & principium spiralis interiecta, æqualis circumferentiæ descripti circuli, quæ est inter contactum, & sectionis punctum; In quo puncto circulus descriptus principium circulationis secat. circumferentiam sumendo uersus præcedentia ab eo puncto, quod est in principio circulationis.

SIT linea spiralis abcd in prima circulatione descripta: & cōtingat ipsam quædam recta linea edf in d puncto: & à d ad principium spiralis iungatur ad: & centro quidem a, interuallo autem ad, circulus describatur dmn, qui secet principium circulationis in k: & ducatur fa, ad ipsam ad perpendicularis. perspicuum quidē est, ipsam fa coire cum contingente. sed æqualem esse circumferentiæ kmnd, illud uero demonstrare oportet. Nam si æqualis non est, uel maior erit, uel minor. Sit primū si esse potest, maior: & sumatur quædam recta la minor, quàm fa, & maior, quàm circumferentia kmnd. Rursus circulus est kmn: & in circulo linea minor diametro dn: proportioq;, quam habet da ad al maior est ea, quam dimidia dn habet ad lineam ab a puncto ad ipsam dn perpendiculariter ductam. potest igitur ab a duci linea ae ad nd productam: ita ut er ad dr eandem habeat proportionem,

nem,

nem, quam d a ad a l. quod oſtenſum eſt fieri poſſe. quare e r ad a r eandem habebit proportionem, quam d r ad a l. Sed d r ad a l minorem habet, quàm d r circumferentia ad circumferentiam k m d: quoniam recta d r minor eſt d r circumferentia, & a l maior circumferentia k m d. minorem igitur proportionem habet e r ad a r, quàm d r circumferentia ad circumferentiam k m d. quare & a e ad a r minorem habet, quam circumferentia k m r ad k m d circumferentiã. Quam uero proportionem habet circumferentia k m r ad k m d circumferentiam, eandem habet q a ad a d. unde ſequitur, e a ad a r minorem proportionem habere, quã a q ad d a: quod fieri non poteſt. non ergo recta f a maior eſt circumferentia k m d. Similiter au-




A tem ſuperioribus oſtendetur, neque minor eſſe. æqualis igitur erit.

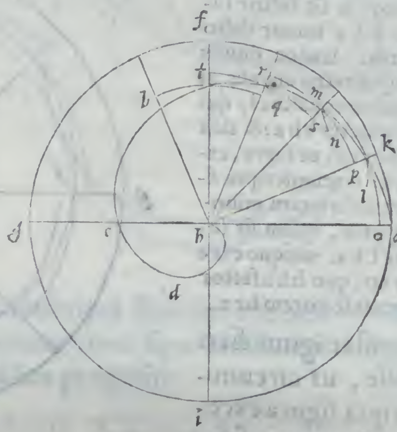
B Eodem quoque modo oſtendetur, & ſi lineam ſpiralem in ſecunda circulatione deſcriptam contingat recta linea, non in termino ipſius: & alia eadem conſtruantur: lineam rectam, quæ inter contingentem, & principium ſpiralis interiicitur, æqualem eſſe toti circumferentiæ circuli deſcripti, & inſuper circumferentiæ, quæ inter dicta puncta interiicitur, cricumferentia ipſa ſimiliter ſumpta. Et ſi linea recta ſpiralem in qualibet circulatione deſcriptam contingat, non in termino ipſius: & alia eadem conſtruantur: rectam lineam inter dicta puncta interiectam, multiplicem eſſe circumferentiæ circuli deſcripti, ſecundum numerum uno minorem, quàm ſit numerus circulationum, & inſuper æqualem circumferentiæ inter dicta puncta interiectæ, & ſimiliter ſumptæ.

## PROPOSITIO XXI.

SVmpto ſpatio linea ſpirali in prima circulatione deſcripta, & recta linea prima in principio circulationis contento, poteſt figura quædam plana crcumſcribi, & altera inſcribi ex ſimilibus ſectoribus conſtans: ita ut circumſcripta inſcriptam excedat ſpatio minori quocunque propoſito ſpatio.

SIT linea ſpiralis a b c d in prima circulatione deſcripta, cuius principium ſit punctum h: principium circulationis linea h a: circulus primus f g i a: & lineæ a g, f i diametri ipſius, quæ ſecent ſe ſe ad angulos rectos. diuiſo igitur ſemper angulo recto bifariam, & ſectore angulum rectum continente, erit tandem, quod relinque-tur

tur ex ſectore minus ſpatio propoſito. & ſit ſector factus a h k minor dicto ſpatio. Diuidantur præterea anguli quatuor recti in angulos æquales illi, qui continetur a h, h k: & lineæ rectæ facientes angulos ad ſpiralem lineam ducantur: ſitq; punctum l, in quo recta h k ſpiralem lineam ſecat: et centro quidem h, interuallo autem h l circulus deſcribatur. cadet igitur circumferentia ipſius, quæ in præcedentia fertur intra lineam ſpiralem; quæ uero in ſequentia, extra. itaque deſcribatur circumferentia o m, ita ut incidat in h a, in puncto o: & in eam, quæ poſt h k ad ſpiralem lineam ducta eſt, in m. Rurſus & in quo puncto h m ſecat ſpiralem, ſit n: et centro h, interualloq; h n circulus deſcribatur, ut incidat in h k, & in eam, quæ poſt h m ducta eſt ad ſpiralem lineam: & ſimiliter per alia puncta, in quibus lineæ æquales angulus facientes ſecāt ſpiralem lineam, circuli deſcribantur ex h centro, ita ut uniuſcuiuſque circumferentia, & in præcedentem, & in ſequentem lineam incidat. erit iam circa ſumptum ſpatium circumſcripta figura ex ſimilibus ſectoribus cōſtans, & alia eidem inſcripta. B Circumſcriptam uero excedere inſcriptam ſpatio minori, quocunque propoſito, oſtendetur ad hunc modum. eſt enim h l o ſector æqualis ſectori h m l: & h n p ſector æqualis ipſi h n r: & h q s ipſi h q t: & aliorum ſectorum unuſquiſque, qui in figura inſcripta continentur, æqualis eſt ſectori in figura circumſcripta contento, qui commune latus habuerit. Ex quibus ſequitur omnes ſectores omnibus ſectoribus æquales eſſe. figura igitur ſpatio inſcripta æqualis eſt figuræ circumſcriptæ, dempto h a k ſectore: C ſolus enim hic ex omnibus, qui in figura circumſcripta continentur, relictus eſt. Vnde ſequitur, circumſcriptam figuram excedere inſcriptam ſectore a k h; qui quidem minor eſt propoſito ſpatio.



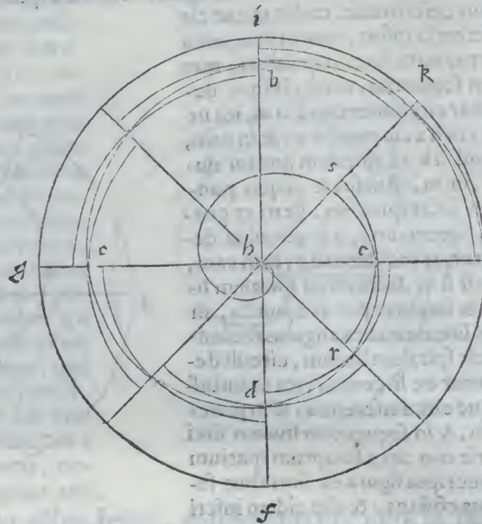

Ex his conſtat eſt circa dictum ſpatium poſſe circumſcribi figuram, qualis dicta eſt, & rurſus alteram eidem inſcribi: ita ut circumſcripta dictum ſpatium excedat ſpatio minori quocunque propoſito, & ipſum ſpatium figuram inſcriptam excedat ſimiliter minori quocunque propoſito ſpatio.

PROPOSITIO XXII.

SVmpto ſpatio linea ſpirali in ſecunda circulatione deſcripta, & recta linea ſecunda in principio circulationis, contento, poteſt figura plana circumſcribi, & altera inſcribi ex ſimilibus ſectoribus conſtans: ita ut circumſcripta inſcriptam excedat ſpatio minori quocunque propoſito.

SIT linea ſpiralis a b c d e in ſecunda circulatione deſcripta, cuius principium

punctum h: principium circulationis recta linea a h: & ipsa ea secunda in principio circulationis; secundus autem circulus sit a f g i: & lineæ a g, f i diametri ipsius secantes se se ad angulos rectos. Rursus diuiso semper angulo recto bifariam, & secto re angulum rectum continente, erit tandem residuũ minus spatio proposito: & sit sector factus h k a minor dicto
A spatio. Itaque diuisis semper rectis angulis in angulos æquales ei, qui continetur k h a: & aliis dispositis, ut supra, excedet circumscripta figura inscriptam minori spatio, quàm sit sector h k a. nanque excedet eo, quo h k a sector superat sectorem h e r.




B Constat igitur fieri posse, ut circumscripta figura excedat sumptum spatium spatio minori quocunque proposito, & rursus spatium excedat figuram sibi ipsi inscriptam minori quocunque proposito spatio. Eodem autem modo constat, sumpto spatio linea spirali in quacunque circulatione descripta, & recta linea in principio circulationis secundum ipsius numerum nominata, contento, posse circumscribi figuram planam; qualis dicta est, & rursus alteram inscribi: ita ut circumscripta sumptum spatium excedat spatio minori quocunque proposito, & dictum spatium figuram inscriptam excedat minori quocunque proposito spatio.

## PROPOSITIO XXIII.

Svmpto spatio contento linea spirali, quæ minor sit ea, quæ in una circulatione describitur, quæq; non habeat terminum principium lineæ spiralis, & contento rectis lineis à principio spiralis ductis, potest figura plana circumscribi, ex similibus sectoribus constans, & altera inscribi: ita ut circumscripta inscriptam excedat spatio minori, quàm sit quodlibet propositum spatium.

Sit linea spiralis a b c d e, cuius termini a e puncta, principium punctum h. & iunctis a h, h e, centro quidem h, interuallo autem h a circulus describatur, qui occurrat lineæ h e in f. Itaque angulo, qui ad h, & sectore a h f, semper bifariam diuiso, erit quod relinquetur, minus spatio proposito. Sit sector a h k minor dicto spatio. similiter autem iis, quæ superius tradita sunt, describantur circuli per puncta,

ɾta, in quibus lineæ rectæ æquales angulos facientes ad h secant spiralem lineam: ita ut uniuscuiusque circumferentia, & in præcedentem, & in sequentem lineam incidat. erit iam circa spatium linea spirali a b c d e, & rectis lineis a h, h e, contentum, circumscripta quædam figura plana ex sectoribus similibus constans, & altera eidem inscripta. Circumscripta autem inscriptam excedet spatio minori proposito spatio. est enim sector h a k dicto spatio minor.

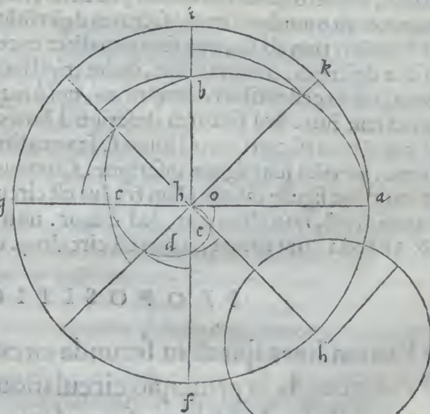



Ex hoc manifestum est fieri posse, ut circa dictum spatium figura plana, qualis dicta est, circumscribatur: & rursus altera eidem inscribatur: ita ut circumscripta spatium excedat minori quolibet proposito spatio, & spatium item figuram sibi ipsi inscriptam excedat spatio minori quolibet proposito.

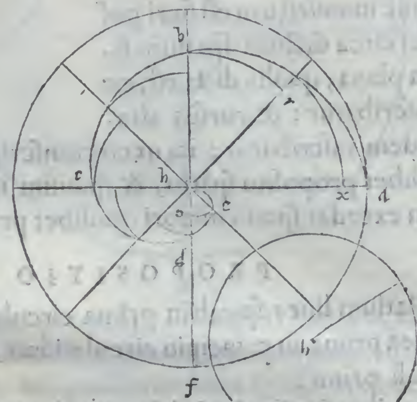
## PROPOSITIO XXIIII.

SPatium linea spirali in prima circulatione descripta, & recta linea prima in principio circulationis, contentum, tertia pars est circuli primi.

SIT linea spiralis a b c d e h in prima circulatione descripta, cuius principium punctum h: recta linea h a prima in principia circulationis: & a f g i circulus primus, cuius tertia pars sit circulus in quo q. Ostendendum est, dictum spatium æquale esse circulo q. Si enim non est æquale, uel eo maius erit, uel minus. Sit primum minus, si fieri potest. circa spatium autem linea spirali a b c d e h, & recta a h contentum, circumscribi potest figura plana ex similibus sectoribus constans: ita ut excedat spatium minori excessu, quàm quo circulus q dictum spatium excedit. Itaque circumscribatur: & sit sectorum, ex quibus ipsa constat, maximus h a k, & h e o minimus. patet igitur circumscriptam figuram circulo q minorem esse. producantur rectæ lineæ facientes ad h angulos æquales quousque incidant in circuli circumferentiam. Sunt igitur quædam lineæ ab h puncto ad lineam spiralem ductæ, quæ se se æqualiter excedunt; quarum maxima quidem h a, minima uero h e, & minima excessui est æqualis: sunt præterea aliæ



lineæ ab eodem puncto h ductæ ad circuli circumferentiam, numero quidem prædictis æquales, magnitudine uero unaquæque æqualis maximæ. et ab omnibus similes sectores describuntur, & ab iis, quæ se se æqualiter excedunt, & ab iis, quæ inter se, & maximæ illarum sunt æquales. sectores igitur descripti ab iis, quæ sunt æquales maximæ, minores sunt, quàm tripli sectorum, qui describuntur ab iis, quæ se se
B æqualiter excedunt, ut ostensum est. sunt autem sectores ab iis, quæ sunt æquales maximæ descripti, circulo a f g i æquales: et qui ab iis, quæ se se æqualiter excedunt, æquales sunt figuræ circumscriptæ. Quare circulus a f g i figuræ circumscriptæ minor est, quàm triplus: & est triplus circuli ψ. minor est igitur ψ circulus figura circumscripta. non est autem minor, sed maior. non ergo spatium contentum linea spirali a b c d e h, & a h recta linea minus est ψ circulo. Sed neque maius. Sit enim maius, si fieri potest. Rursus in spatio linea spirali a b c d e h, & recta a h contento inscribi potest figura: ita ut spatium figuram circumscriptam excedat minori excessu, quàm quo excedit ψ circulum. Inscribatur ergo: & sit sectorum, ex quibus inscripta figura constat, h r x maximus, & minimus o h e. manifestum est inscriptam figuram ψ circulo maiorem esse. Itaque producantur rectæ lineæ facientes ad h angulos æquales usque ad circuli circumferentiã.
C Rursus sunt quædam rectæ lineæ se se æqualiter excedentes à puncto h ad lineam spiralem ductæ; quarum maxima est h a, & h e minima, & minima excessui est æqualis. Sunt autem & aliæ lineæ ab h ductæ ad a f g i circuli circumferentiam, numero quidem æquales prædictis, magnitudine uero unaquæque æqualis maximæ. & ab omnibus similes sectores describũtur, tũ ab iis, quæ inter se, & maximæ sunt æquales, tum ab iis, quæ se se æqualiter excedunt. sectores igitur ab æqualibus maximæ descripti, maiores sunt, quàm tripli sectorum, qui describuntur à lineis se
D se æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à maxima describitur: hoc enim demonstratum iam fuit. Sed sectores descripti à lineis æqualibus maximæ, circulo a f g i sunt æquales: descripti uero à lineis se se æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à maxima, æquales sunt figuræ inscriptæ. Circulus igitur a f g i maior est, quàm triplus inscriptæ figuræ. atque idem triplus est circuli ψ. Quare circulus ψ inscripta figura maior est. non est autem, sed minor. non ergo spatium linea spirali a b c d e h, & a h recta contentum, maius est circulo ψ. necesse est igitur eidem æquale esse.



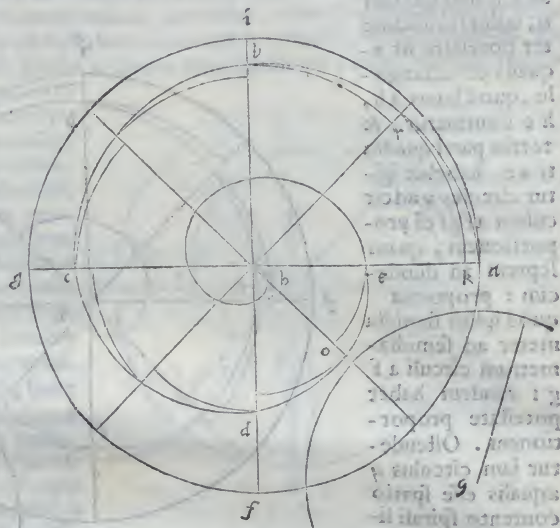

## PROPOSITIO XXV.

Spatium linea spirali in secunda circulatione descripta, & recta linea secunda in principio circulationis, contentum, eam proportionem habet ad circulum secundum, quam septem ad duodecim;
A quæ eadem est ei, quam habent hæc utraque: rectangulum contentum semidiametro circuli secundi, & semidiametro primi; & tertia pars quadrati eius lineæ, qua semidiameter secundi circuli excedit

cedit ſemidiametrum primi, ad quadratum ſemidiametri ſecundi circuli.

SIT linea ſpiralis a b c d e in ſecunda circulatione deſcripta, cuius principium B
punctum h: recta linea h e in principio circulationis prima: & ipſa a e ſecunda: cir
culus autem a f g i ſit ſecundus: & lineæ a g, i f diametri eius inter ſe ſe ad angulos
rectos conſtitutæ. Oſtendendum eſt, ſpatium contentum a b c d e linea ſpirali, & re
cta a e, ad circulum a f g i eam habere proportionem, quam ſeptem ad duodecim.
Sit circulus quidam
ꝗ, cuius ſemidiame
ter poteſtate ſit æ-
qualis ei rectangu-
lo, quod lineis a h,
h e continetur, &
tertiæ parti quadra
ti a e. habebit igi- C
tur circulus ꝗ ad cir
culum a f g i eã pro-
portionem, quam
ſeptem ad duode-
cim: propterea
quòd ipſius ſemidia
meter ad ſemidia-
metrum circuli a f
g i eandem habet
poteſtate propor-
tionem. Oſtende-
tur iam circulus ꝗ
æqualis eſſe ſpatio
contento ſpirali li-
nea a b c d e, & re-
cta a e. Nam ſi non
ſit æqualis, uel maior erit, uel minor. Sit primum maior, ſi eſſe poteſt. circa ſpa-
tium igitur poteſt figura plana circumſcribi ex ſimilibus ſectoribus conſtans: ita ut
figura circumſcripta ſpatium excedat minori exceſſu, quàm quo circulus ꝗ excedit
dictum ſpatium. Circumſcribatur: & ſit h a k ſector maximus eorum, ex quibus cõ
ſtat circumſcripta figura, & minimus h o l. manifeſtum ergo eſt circumſcriptam fi-
guram circulo ꝗ minorem eſſe. producantur lineæ rectæ facientes ad h angulos æqua
les uſque ad circumferentiam circuli ſecundi. Itaque ſunt quædam lineæ ſe ſe æqua-
liter excedentes, quæ uidelicet à puncto h ductæ in ſpiralem lineam incidunt; qua-
rum h a maxima eſt, minima h e. ſunt autem & aliæ lineæ à puncto h ad circuli a f g
i circumferentiam ductæ, numero quidem illis una minores, magnitudine uero in-
ter ſe ſe, & maximæ illarum æquales. & deſcripti ſunt ſectores ſimiles à lineis maxi-
mæ æqualibus, & ab iis, quæ ſe ſe æqualiter excedunt, præterquam ab ea, quæ mini-
ma eſt. ſectores igitur à lineis æqualibus maximæ deſcripti ad ſectores deſcriptos à
lineis ſe ſe æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à minima, minorem habent pro- D
portionem, quàm quadratum h a maximæ ad utraque hæc, ad rectangulum lineis a
h, h e contentum, & ad tertiam partem quadrati a e: hoc enim oſtenſum eſt. Sed
circulus a f g i æqualis eſt ſectoribus, qui fiunt à lineis inter ſe, & maximæ illarum æ- E
qualibus: ſectoribus autem, qui à lineis ſe ſe æqualiter excedentibus, dempto eo,
qui à minima fit, æqualis eſt figura circumſcripta. minorem igitur proportionem ha
bet a f g i circulus ad circumſcriptam figuram, quam quadratum lineæ a h ad hæc
utraque: ad rectangulum a h e, & ad tertiam partem quadrati a e. Quam uero pro-
portionem

portionem habet quadratum a h ad rectangulum a h e, & ad tertiam partem quadrati a e, eandem habet circulus a f g i ad ꝗ circulum. minorem ergo proportionem habet circulus a f g i ad circumscriptam figuram, quàm ad ꝗ circulum: ex quibus sequitur circulum ꝗ minorem esse figura circumscripta. non est autem minor, sed maior. non igitur circulus ꝗ maior est spatio linea spirali a b c d e, & a e recta linea contento. Sed neque minor. sit nanque minor, si esse potest. rursus in spatio lineæ spirali, & recta a e contento, inscribi potest figura plana ex sectoribus similibus: ita ut spatium contentum a b c d linea spirali, & recta a e, excedat figuram inscriptam minori excessu, quàm quo ꝗ circulum excedit. Sit iam inscripta: & sectorum, ex quibus ipsa constat, sit maximus h k r, & h e o minimus. manifestũ est igitur inscriptam figuram ꝗ circulo maiorem esse. producãtur rectæ lineæ, quæ ad h faciunt angulos æquales ad circuli usque circumferentiam. Rursus sunt quædam lineæ se se æqualiter excedentes, quæ ab h in spiralem lineam incidunt, quarum maxima h a, & h e minima, Sunt etiam aliæ lineæ ab h in circumferentiam circuli incidentes, numero quidem una minores, magnitudine uero, & inter se, & maximæ æquales: descripti quoque sunt sectores similes à lineis æqualiter sese excedentibus, &




F à lineis æqualibus maximæ. sectores igitur ab æqualibus maximæ descripti ad sectores à lineis se se æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à maxima, maiorem proportionem habent, quàm quadratum h a ad utraque hæc, ad rectangulum a h e, & ad tertiam partem quadrati e a. est autem figura in spatio inscripta æqualis sectoribus, qui à lineis se se æqualiter excedentibus fiunt, dempto, eo qui à maxima: & cæteris sectoribus æqualis est circulus. maiorem igitur proportionem habet a f g i circulus ad inscriptam figuram, quàm quadratum h a ad rectangulum a h e, & ad tertiam partem quadrati a e. hoc est circulus a f g i ad ꝗ circulum. quare maior est ꝗ circulus figura inscripta: quod fieri non potest: erat enim minor. non ergo neque minor est ꝗ circulus spatio linea spirali a b c d e, & a e recta contento. æqualis est igitur, ut proponebatur.

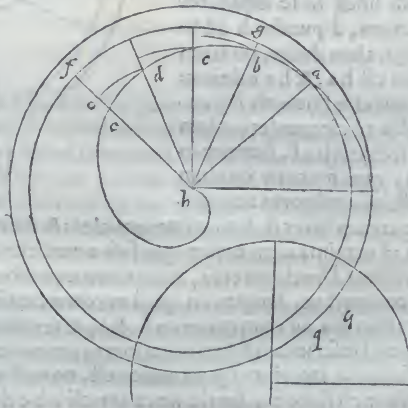
Eodem modo ostendetur, & spatium contentum linea spirali in qualibet circulatione descripta, & recta linea, quæ secundum numerum circulationis dicatur, ad circulum eodemmet numero denominatum, eam proportionem habere, quam utraque hæc: rectangulum contentum semidiametro circuli à numero circulationis di-

cti, & semidiametro circuli dicti à numero, qui sit uno minor numero circulationis: & tertia pars quadrati eius lineæ, qua semidiameter circuli maioris excedit semidiametrum minoris; ad quadratum semidiametri maioris circuli. G

## PROPOSITIO XXVI.

SPatium contentum linea spirali, quæ sit minor ea, quæ in una circulatione describitur; quæq; non habeat terminum, principium lineæ spiralis, & contentum rectis lineis à terminis eius ad spiralis principium ductis, ad sectorem habentem semidiametrum æqualem maiori earum, quæ à terminis ad spiralis principium ductæ sunt, circumferentiam uero inter dictas lineas interiectam ad partes lineæ spiralis, eam proportionem habet, quam utraque hæc: rectangulum contentum rectis lineis, quæ à terminis ipsius ad spiralis principium ducantur: & tertia pars quadrati eius lineæ, qua maior dictarum linearum minorem excedit, ad quadratum maioris earundẽ.

SIT linea spiralis a b c d e minor ea, quæ in una circulatione describitur; cuius termini sint a e puncta: & sit principium spiralis punctum h: & centro quidem h, interuallo autem h a circulus describatur: & linea h e occurrat eius circumferentiæ in puncto f. Ostendendum est, spatium linea spirali a b c d e, & rectis a h, h e contentum, ad sectorem a h f eam habere proportionem, quam habent hæc utraque; rectangulum a h e, & tertia pars quadrati e f ad quadratum h a. Sit circulus q ψ habens semidiametrum potestate æqualem, & rectangulo a h e, & tertiæ parti quadrati e f. ad centrum autem ipsius sit angulus æqualis angulo ad h, constituto. sector igitur q ψ ad h a f sectorem eandem proportionem habet, quam rectangulum a h e, & tertia pars quadrati e f habent ad quadratum h a: horum enim semidiametri inter se se eandem habent potestate




A

proportionem. Ostendetur iam q ψ sector æqualis spatio linea spirali a b c d e, & rectis lineis a h, h e contento. Nam si non est æqualis: uel maior erit, uel minor. Sit primum, si esse potest, maior. circa spatium igitur potest figura plana circumscribi ex sectoribus similibus constans: ita ut excedat ipsum minori excessu, quàm quo q ψ sector dictum spatium excedit. Sit iam circumscripta; & sectorum, ex quibus ipsa constat, maior quidem sit h a g; minor uero h o d. manifestum est, circumscriptam figuram sectore q ψ minorem esse. producantur rectæ lineæ, quæ faciunt ad h angulos æquales, usque ad circumferentiam sectoris h a f. Itaque lineæ quædam sunt

æqualiter

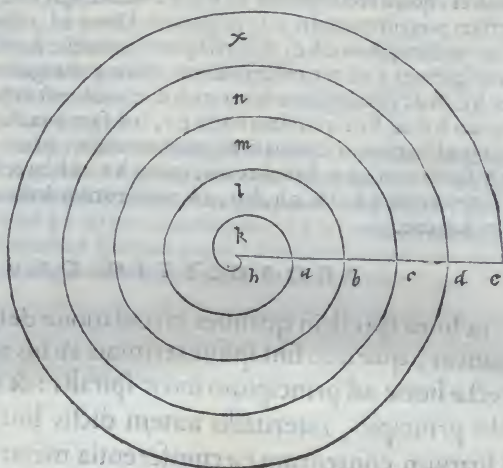
æqualiter ſe ſe excedentes, à puncto h ad ſpiralem lineam ductæ, quarum maxima h a, & h e minima. ſunt autem & aliæ lineæ numero quidem una minores illis, magnitudine uero inter ſe, & maximæ æquales; quæ ab h ductæ in ſectoris a h f circumferentiam incidunt, dempta linea h f. deſcriptiq́; ſunt ſimiles ſectores ab omnibus, & ab iis, quæ inter ſe, & maximæ illarum ſunt æquales, & ab iis, quæ ſe ſe æqualiter excedunt: ab ipſa uero h e nihil eſt deſcriptum. ſectores igitur à lineis inter ſe, & maximæ æqualibus deſcripti ad ſectores à lineis ſe ſe æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à minima, minorem proportionem habent, quàm quadratum h a ad utraque hæc: ad rectangulum a h e; & tertiam partem quadrati e f. Sed ſectoribus quidem, qui à lineis inter ſe, & maximæ æqualibus deſcribuntur, æqualis eſt h a f ſector: illis uero, qui à lineis ſe ſe æqualiter excedentibus, circumſcripta figura eſt æqualis. minorem ergo proportionem habet h a f ſector ad circumſcriptam figuram, quàm quadratum h a ad hæc utraque: ad rectangulum a h e; & ad tertiam partem quadrati e f. Quam uero proportionem habet quadratum h a ad dicta ſpatia, eandem ſector h a f habet ad ſectorem q ч. quare ſector q ч minor eſt figura circumſcripta. atqui minor non eſt, ſed maior. non igitur ſector q ч maior erit ſpatio linea ſpirali, a b c d e, & h a, h e rectis lineis contento, Sed neque erit minor, Sit enim minor, ſi eſſe poteſt, & alia eadem fiant. Rurſus in ſpatio poteſt figura plana inſcribi ex ſimilibus ſectoribus: ita ut dictum ſpatium figuram inſcriptam excedat minori exceſſu, quàm quo q ſectorem excedit. Inſcribatur: & ſit ſectorem, ex quibus ipſa conſtat, maior quidem h b g; minor uero o h e. manifeſtum eſt igitur inſcriptam figuram maiorem eſſe q ſectore. Rurſus ſunt quædam lineæ ſe ſe æqualiter excedentes, à puncto h ad lineam ſpiralem ductæ, quarum maxima eſt h a, & h e minima: ſunt item aliæ lineæ ab h puncto ductæ ad circumferentiam uſque ſectoris h a f, dempta ipſa h a; quæ numero quidem ſunt illis una minores: magnitudine autem inter ſe, & maximæ æquales: & deſcripti ſunt ab unaquaque ſimiles ſectores: à maxima uero earum quæ ſeſe æqualiter excedunt, nihil eſt deſcriptum. ſectores igitur à lineis inter ſe, & maximæ æqualibus, ad ſectores à lineis ſe ſe æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à maxima, maiorem proportionem habent, quàm quadratum h a ad contentum a h, h e; & tertiam partem quadrati e f. quare & h a f ſector ad inſcriptam figuram maiorem proportionem habet, quàm ad q ſectorem. ergo ſector q inſcripta figura maior eſt. non eſt autem maior, ſed minor. neque igitur minor eſt ſector q ſpatio linea ſpirali a b c d e, & a h, h e rectis lineis contento. quare eidem eſt æqualis.

## PROPOSITIO XXVII.

SPaciorum lineis ſpiralibus, & rectis, quæ in circulationibus ſunt, contentorum, tertium quidem ſecundi duplum eſt; quartum triplum; quintum quadruplum; & ſemper ſequens ſecundum numerus,

numeros, qui deinceps ſunt, ſecundi eſt multiplex. primum uero ſpatium ſexta pars eſt ſecundi.

Sit propoſita linea ſpiralis, & in prima circulatione deſcripta, & in ſecunda, & in cæteris quotlibet: Sitq́; eius principium punctum h: & h e recta linea, principium circulationis: ſpatiorum autem primum ſit k; ſecundum l; tertium m; quartum n; & quintum x. Oſtendendum eſt, ſpatium k ſextam partem eſſe eius, qui ſequitur: & m ſpatium duplum eſſe ipſius l: & n triplum eiuſdem: & eorum, qui deinceps ſunt, ſemper id, quod ſequitur, multiplex eſſe ſpatii l ſecundum numeros ſequentes. At uero k ſextam partem eſſe ipſius l ſic oſtendetur. Quoniam ſpatium kl ad ſecundum circulum, oſtenſum eſt eam habere proportionem, quam ſeptem ad duodecim: ſecūdus autem circulus ad primum eſt, ſicut duodecim ad tria; quod manifeſte patet: & circulus primus ad ſpatium k, ſicut tria ad unū: erit ſpatiū k ſexta pars ipſius l. Ruſus ſpatium klm ad tertium circulū eam habere proportionē oſtenſum eſt, A



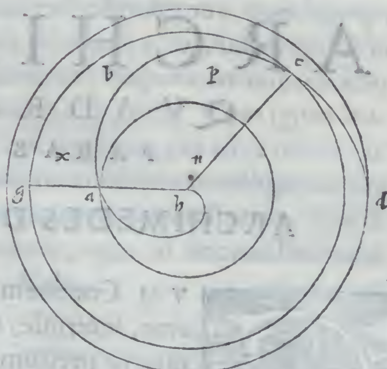

quam utraque hæc: rectangulum c h b; & tertia pars quadrati c b, habent ad quadratum c h: tertius autem circulus ad ſecundum eam habet, quam quadratum c h ad h b quadratum: & ſecundus circulus ad ſpatium kl eam, quam quadratum b h ad hæc utraque: rectangulum b h a; & tertiam partem quadrati a b. ſpatium ergo kl m ad ipſum kl eam habet proportionem, quam hæc utraque: rectangulum c h b; & tertia pars quadrati c b, ad utraque illa: ad rectangulum ſcilicet b h a; & tertiam partem quadrati a b. Hæc autem eam habent inter ſe proportionem, quam decem & nouem ad ſeptem. quare & ſpatium klm ad kl habet eam, quam decem & nouem ad ſeptem. ergo m ad kl eam, quam duodecim ad ſeptem: & kl ad l, quam ſeptem ad ſex. unde ſequitur m ſpatium ipſius l duplum eſſe. Ea autem quæ ſequuntur habere proportionem numerorum, qui deinceps ſunt, oſtendetur hoc pacto. Spatium enim klmnx ad circulum, cuius ſemidiameter eſt h e, eam habet proportionem, quam utraque hæc: rectangulum e h d; & tertia pars quadrati d e, ad h e quadratum. circulus autem, cuius ſemidiameter eſt h e, ad circulum, cuius ſemidiameter h d habet eam, quam quadratum h e ad quadratum h d: & circulus, cuius ſemidiameter h d ad ſpatium klmn eam, quam quadratum h d ad utraque: ad rectangulum d h c; & tertiam partem quadrati d c. & ſpatium igitur klmnx ad ſpatium klmn eam habet proportionem, quam rectangulum e h d; & tertia pars quadrati d e, ad rectangulum d h c; & tertiam partem quadrati d c; & diuidendo x ſpatium ad klmn eam habet, quam exceſſus, quo rectangulum e h d unà cum tertia parte quadrati d e, excedit rectangulum d h c unà cum tertia parte quadrati d c, ad rectangu B

C lum d h c; & tertiam partem quadrati d c. Sed utraque illa excedunt hæc utraque eo, quo & rectangulum e h d excedit rectangulum d h c: hoc est eo, quod d h, c e lineis continetur. spatium igitur x ad k l m n spatium eam habet proportionem, quam rectangulum contentum h d, c e, ad rectangulum d h c; & tertiam partem quadrati c d. Per hæc eadem ostendetur, & n spatium ad k l m eam proportionem habere, quam rectangulum ex h c, b d, ad utraque: ad rectangulum c h b; & tertiã partem quadrati c b. quare spatium n ad k l m n eam habet, quam rectangulum ex
D h c, b d, ad rectangulum c h b, & ad tertiam partem quadrati c b unà cum rectan-
E gulo ex h c, b d. & conuertendo. Hæc autem æqualia sunt rectangulo d h c; & tertiæ parti quadrati c d. Quoniam igitur x spatium ad spatium k l m n eam proportionem habet, quam rectangulum ex h d, c e ad utraque hæc; ad rectangulum d h c; & ad tertiam partem quadrati c d: & spatium k l m n ad n spatium habet eam, quam utraque: rectangulum d h c, & tertia pars quadrati c d ad rectangulum ex h c, b d: sequitur spatium x ad n eandem habere, quam rectangulum ex h d, c e ad rectangu
F lum ex h c, b d. rectangulum uero ex h d, c e ad rectangulum ex h c, d b eam habet, quam h d ad h c: quoniam lineæ c e, b d sunt æquales. manifestum est igitur x spatium ad spatium n eam habere proportionem, quam h d ad h c. similiter ostẽ detur & spatium n ad m habere eam, quam h c ad h b: & m ad l, quam b h ad a h. lineæ autem rectæ e h, d h, c h, b h, a h numerorum deinceps sumptorum proportionem habent.

## PROPOSITIO XXVIII.

SI in linea spirali in qualibet circulatione descripta duo puncta sumantur; quæ non sint ipsius termini: ab his autem punctis iungantur rectæ lineæ ad principium lineæ spiralis: & centro quidem lineæ spiralis principio, interuallo autem dictis lineis circuli describantur: spatium contentum circumferentia maioris circuli, quæ inter rectas lineas interiicitur; & linea spirali interiecta inter easdem; & recta linea producta, eam habebit proportionem ad spatium contentum minoris circuli circumferentia, & eadem linea spirali, & recta terminos ipsarum iungente, quam semidiameter minoris circuli unà cum duabus tertiis excessus, quo semidiameter circuli maioris excedit semidiametrum minoris, habet ad semidiametrum minoris unà cum tertia eiusdem excessus.

SIT linea spiralis a b c d in una circulatione descripta: & in ipsa sumantur duo puncta a c: sitq; h principium spiralis: & à punctis a c iungantur rectæ lineæ ad h: & centro quidem h, interuallis autem a h, h c circuli describantur. Ostendendum est, x spatium ad spatium p eandem habere proportionem, quam utraque linea: h a, & duæ tertiæ g a ad utranque lineam: h a & tertiam ipsius g a. spatium enim n p ad sectorem g c h ostensum est eam proportionem habere, quam habet rectangu
A lum g h a, & tertia quadrati a g, ad quadratum g h. Quare x spatium ad n p eam habet, quam rectangulum h a g cum duabus tertiis quadrati g a ad utraque hæc: & ad rectangulum a h g; & ad tertiam partem quadrati g a. et quoniam spatium n p ad n p x sectorem eam proportionem habet, quam utraque hæc: rectangulum a h g; & tertia quadrati g a, ad quadratum h g: sector autem n p x ad sectorem n eam habet, quam h g quadratum ad quadratum h a: habebit & spatium n p ad sectorem n eandem, quam utraque: rectangulum a h g; & tertia quadrati g a ad quadratum h a.




ſpatium igitur n p ad ipſum p eam habet proportionem, quam utraque: & rectangulum g h a, & tertia quadrati g a ad utraque: ad rectangulum g a h, & tertiam quadrati g a. Itaque quoniam x ſpatium ad ſpatium n p eam proportionem habet, quam utraque: rectangulum h a g, & duæ tertiæ quadrati g a ad utraque: ad rectangulum g h a, et tertiam quadrati g a. ipſum autem n p ad p habet eam, quam utraque: rectangulum g h a; et tertia quadrati g a ad utraque: ad rectangulum g a h, et tertiam quadrati g a. habebit et x ſpatium ad p eandem, quam utraque: rectangulum h a g; et duæ tertiæ quadrati g a, ad utraque: rectangulum h a g; et tertiam quadrati g a. Vtraque uero hæc: rectangulum h a g; et duæ tertiæ quadrati g a ad utraque: ad rectangulum h a g; et tertiam quadrati g a, eam proportionem habet, quam utraque linea: h a; et duæ tertiæ g a ad utranque lineam: h a; et tertiam ipſius g a. manifeſtum eſt igitur, x ſpatium ad ſpatium p eam habere proportionem, quam utraque linea: h a; et duæ tertiæ g a ad utranque, h a, et tertiam ipſius g a.

# ARCHIMEDIS
## QVADRATVRA
## PARABOLES.

### ARCHIMEDES DOSITHEO S. D.



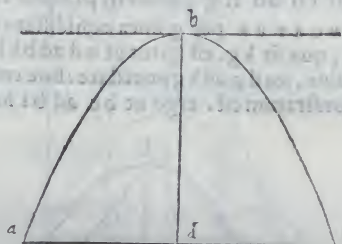
VM Cononem, qui ſolus ex amicis mihi ſupererat, interiiſſe, teq́; eo familiariter uſum, & geometriæ peritum eſſe audiſſem: mortem quidem Cononis grauiter, moleſteq́; tuli, ut & hominis amici; & artium, ac diſciplinarum cognitione plane admirabilis. ad te uero, ut ad Cononem antea conſtitueram, unum ex geometricis theorematibus mittere decreui. quod cum nemo ante hac attigerit, nunc à nobis pertractatum eſt: mechanicis illud quidem primum rationibus inuentum, poſtea uero geometricis etiam demonſtratum. Nonnulli quidem ante nos in geometria uerſati tentarunt oſtendere, quomodo ſpatium rectilineum inueniri poſſet, quod aut dato circulo, aut circuli portioni datæ eſſet æquale. Deinde & ſpatium totius coni ſectione, & recta linea contentum quadrare conati ſunt: ſumentes ad hæc lemmata, quæ non facile concedantur. Quæ quidem tanquam à compluribus non inuenta, plane refutata, ac reiecta ſunt. Portionem uero rectanguli coni ſectione, & recta linea contentam, nemo ex antiquis, quòd ſciam, quadrare aggreſſus eſt; quod nunc à nobis eſt inuentum. ſiquidem demonſtrauimus, omnem portionem, quæ recta linea, & rectanguli coni ſectione continetur, ſeſquitertiam eſſe trianguli baſim habentis portioni eandem, & æqualem altitudinem; ſumpto ad demonſtrationem huiuſmodi lemmate, Inæqualium ſpatiorum exceſſus, quo maius ſuperat minus; fieri poſſe, ut ſibi ipſi coaceruatus quodlibet propoſitum, definitumq́; ſpatium excedat. Hoc ipſo autem lemmate & priores geometræ uſi ſunt, cum ſcilicet demonſtrarunt, circulos inter ſe ſe proportionem habere duplam eius, quæ eſt ſuarum diametrorum: itemq́; ſphæras habere triplam eius, quæ eſt axium proportionem: omnem præterea pyramidem tertiam partem eſſe priſmatis, quod eandem baſim habeat pyramidi, & æqualem altitudinem: & omnem inſuper conum tertiam partem eſſe cylindri eandem ipſi baſim habentis, & altitudinem

æqualem,

æqualem, ſimiliter propoſito lemmate uſi oſtenderunt. contingitq; , ut prædictorum theorematum, quæ demonſtrantur, unicuique non minor, quàm ipſi lemmati fides habeatur. Nuper autem in ſimilem huius fidem adduximus ea, quæ à nobis edita ſunt. Cum igitur huius theorematis demonſtrationes conſcripſerim, eas ad te mitto: ac primum quidem, quomodo mechanicis rationibus inueſtigatum fuerit: poſtea uero quomodo etiam geometricis demonſtretur. Sed & præmittuntur conica quidem elementa, quæ ad demonſtationem hanc maxima neceſſaria ſunt. Vale.

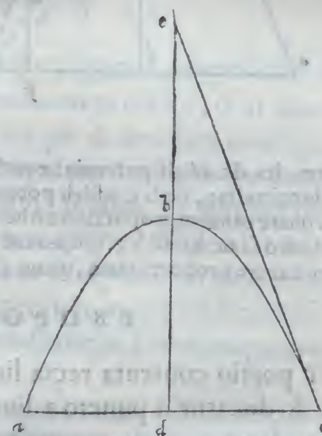
PROPOSITIO I.

SI ſit rectanguli coni ſectio a b c: & linea b d ſit æquidiſtans diametro, uel ipſa diameter: linea autem a d c æquidiſtans lineæ coni ſectionem tangenti in puncto b: erunt ipſæ lineæ a d, d c inter ſe æquales. Quòd ſi a d, d c ſint æquales: linea a d c æquidiſtans erit lineæ in b puncto coni ſectionem tangenti.



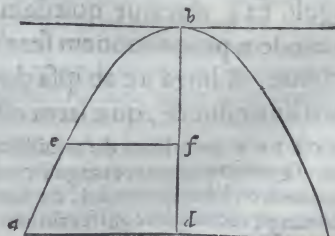

PROPOSITIO II.

SI ſit rectanguli coni ſectio a b c: ſit autem linea b d æquidiſtans diametro, uel ipſa diameter: & a d c æquidiſtans lineæ in puncto b coni ſectionem tangenti: tangat quoque c e linea coni ſectionem in puncto c: erunt lineæ d b, b e inter ſe æquales.




PROPOSITIO III.

SI ſit rectanguli coni ſectio a b c: ſitq; b d, uel æquidiſtans diametro, uel ipſa diameter: & ducantur quæpiam lineæ a d, e f



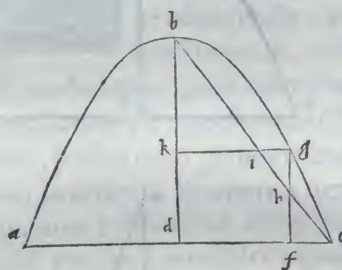
æquidiſtantes lineæ tangenti coni ſectionem in puncto b: erit ut b d ad b f longitudine, ita a d ad e f poteſtate.

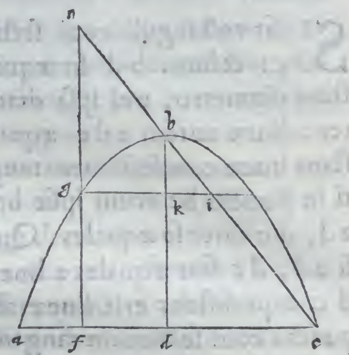
DEMONSTRATA autem ſunt hæc in elementis conicis.

## PROPOSITIO IIII.

SIT portio contenta linea recta, & rectanguli coni ſectione a b c: ipſa autem b d à medio lineæ a c educatur diametro æquidiſtans,
A aut ipſa diameter: & b c iuncta producatur. Itaque ſi alia quæpiam linea f h ducatur æquidiſtans ipſi b d, & ſecans utraſque a c, c b: habebit f h ad h g eandem proportionem, quam d a ad d f.

B DVCATVR per g linea æquidiſtans ipſi a c; quæ ſit k g. eſt igitur ut b d ad b k longitudine, ita d c ad k g poteſtate: hoc enim
C demonſtratum eſt. ergo ut b c ad b i lon-




gitudine, ita d c ad d f potentia: æquales nanque ſunt d f, k g. et idcirco ſicut b c ad b i longitudine, ſic b c ad b h potentia, proportionales igitur ſunt lineæ b c, b h, b i. quare eandem proportionem habet b c ad b h, quam c h ad h i. eſt igitur ſicut c d ad d f, ſic h f ad h g. ipſi autem d c æqualis eſt d a, conſtat ergo d a ad d f eandem habere proportionem, quam f h ad h g.

## PROPOSITIO V.

SIT portio contenta recta linea, & rectanguli coni ſectione a b c: & ducatur à puncto a linea a f æquidiſtans diametro; & à c puncto ducatur tangens coni ſectionem in c, quæ ſit c f. ſi igitur in triangulo f a c ducatur quædam linea æquidiſtans ipſi a f: ſecundum eandem proportionem ſecabitur linea ducta à coni rectanguli ſectione, & linea a c ab ipſa ducta; pars uero lineæ a c, quæ eſt ad a, parti lineæ ductæ, quæ item eſt ad a proportione reſpondebit.

DVCATVR enim linea d e æquidiſtans ipſi a f: et ſecet primum lineam a c bi-
A fariam. Quoniam igitur rectanguli coni ſectio eſt a b c: et ducta eſt b d æquidiſtans diametro: lineæ autem a d, d c ſunt æquales inter ſe ſe: erit linea, quæ in b puncto tangit rectanguli coni ſectionem ipſi a c æquidiſtans. Rurſus quoniam d e æquidiſtans

æquidiſtans eſt diametro : & à puncto c ducta eſt c e tangens ſectionem coni in c : ipſa autem d c æquidiſtat lineæ tangenti in b : æqualis erit e b ipſi b d. quare eandem habet proportionẽ a d ad d c, quam d b ad b e. Si quidem igitur bifariam ſecat ducta linea ipſam a c : oſtenſum eſt propoſitum. ſin minus, ducatur alia quædam linea k l æquidiſtans ipſi a f. oſtendendum eſt eandem habere proportionem a k ad k c, quam k h ad h l. Quoniam C
enim æqualis eſt b e ipſi b d : æqualis eſt & i l ipſi k i : eandem igitur proportionem habet i l ad k i, quam d c ad d a : habet autem & k i ad h k D
eandem, quam d a ad a k : hoc enim in antecedente eſt demonſtratum. quare eandem habet proportionem E
k h ad h l, quam a k ad k c : quod demonſtrandum proponebatur.

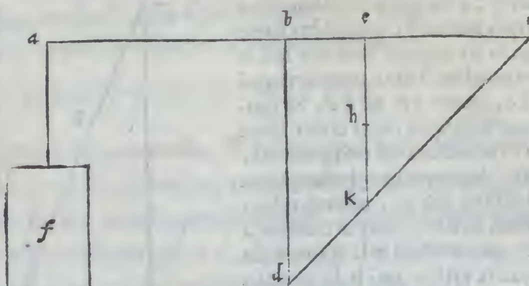
## PROPOSITIO VI.

INtelligatur autem hoc, quod in ſpeculatione propoſitum eſt : & A
ſit conſpectum in plano ſuper horizontem erecto, & in linea a b : deinde ea, quæ ſunt ad eaſdem partes ipſi d, deorſum intelligantur; & quæ ad contrarias, ſurſum. triangulum autem b d c ſit rectangulum, rectum habens angulum ad b, & latus b c æquale dimidio libræ; linea ſcilicet a b æquali exiſtente ipſi b c. ſuſpendaturq; triangulum ex punctis b c : & aliud ſpatium f ſuſpendatur ex altera parte libræ in puncto a : ita ut f in a ſuſpenſum æquiponderet ipſi b d c triangulo, ut nunc conſtituto. Dico ſpatium f tertiam partem eſſe trianguli b d c.

QVONIAM enim poſitum eſt, libram æquiponderare : erit a c linea ipſi horizonti æquidiſtans. lineæ autem ad rectos angulos ductæ ipſi a c, in plano erecto ſuper horizontem, & ipſæ ad horizontem perpendiculares erunt. Secetur linea b c in puncto e : ita ut c e ipſius e b ſit dupla : ducaturq; k e æquidiſtans d b, & bifariam ſecetur in h. erit trianguli b d c centrum grauitatis ipſum h punctum : nam demon B
ſtratum eſt hoc in mechanicis. Si igitur b d c trianguli ſuſpenſio, quæ eſt ad b c ſol- C
uatur, & ſuſpendatur ad e : manebit triangulum, ut nunc habet : Vnumquodque enim ſuſpenſorum ex quo puncto conſtitutum eſt, manet; cum in linea perpendiculari ſit punctum ſuſpenſionis, & centrum grauitatis ſuſpenſi : quod etiam eſt demonſtratum. Itaque quoniam triangulum b c d eandem habet conſtitutionem ad librã : æquiponderabit ſimiliter f ſpatium. & quoniam æquiponderant, ſpatium quidem D
f ſuſpenſum ad a; triangulum autem b d c ad e : conſtat, ea ex altera parte reſpon-

dere

dere ipſis longitudinibus, atque eſſe, ut a b ad b e, ita b d c triangulum ad ſpatium f. eſt autem a b linea tripla ipſius b e. & triangulum igitur b d c triplum eſt ipſius f ſpatii.

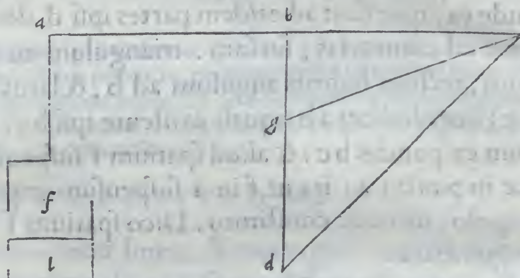



Manifeſtũ præterea eſt, ſi triplũ. ſit b d c triãgulum ipſius f ſpatii: ea ſimiliter conſtituta æquiponderare.

## PROPOSITIO VII.

SIT rurſus libra a c linea, cuius medium b: & ſuſpendatur triangulum c d g in b: ſitq́; c d g triangulum obtuſiangulum, baſim habens lineam d g, & altitudinem æqualem dimidiæ libræ: & ſuſpendatur triangulum d c g ex punctis libræ b c: ſpatium autem f ſuſpenſum ex a, æquiponderet ipſi triangulo c d g: ita ut nunc, poſito. Similiter oſtendetur ſpatium f tertiam partem eſſe c d g trianguli.

SVSPENDATVR enim & aliud ſpatium l ex a, quod quidem ſit tertia pars trianguli b c g. æquiponderabit igitur b d c triangulum ſpatio f l. Et quoniam triangulum b c g æquiponderat ſpatio l: triangulum autem b c d ipſi f l: & tertia pars eſt f l trianguli b c d: conſtat & triangulum c d g ſpatii f triplum eſſe.




## PROPOSITIO VIII.

SIT libra a c, cuius medium b: & ſuſpendatur in b triangulum rectangulum c d e, rectum angulum habens ad e, & ſuſpendatur ex c e punctis libræ: ſpatium autem f ſuſpendatur ex a, & æquiponderet triangulo c d e: ita ut nunc, conſtituto: & quam proportionem habet a b ad b e, habeat triangulum c d e ad ſpatium K. Di-

co f ſpatium triangulo quidem c d e minus eſſe, ſpatio autẽ K maius.

SVMATVR enim trianguli d e c centrũ grauitatis, quod ſit h: & ducatur h g æquidiſtans ipſi d e. Quoniam igitur æquiponderat c d e triangulum ſpatio f: eandem habet proportionem c d e ad f, quam linea a b ad ipſam b g. quare minus eſt f ſpatiũ triangulo c d e. & quoniam c d e triangulum ad f quidem eam habet proportionem, quam b a ad b g; ad ipſum autem k habet eam, quam b a ad b e: conſtat maiorem proportionem habere c d e triangulum ad k, quam ad f. quare maius eſt f ipſo k.

PROPOSITIO IX.

SIT rurſus libra a c, cuius medium b: & triangulum c d K obtuſiangulum, baſim habens d K, & altitudinem e c: & ſuſpendatur ex punctis libræ e c: ſpatium uero f ſuſpenſum ex a æquiponderet triangulo d c K ita habenti, ut nunc habet: & quam proportionem habet a b ad b e, eam triangulum c d K habeat ad ſpatium l. Dico f ſpatium ipſo quidem l maius eſſe, triangulo autem d c K minus.

DEMONSTRABITVR hoc ſimiliter antecedenti.

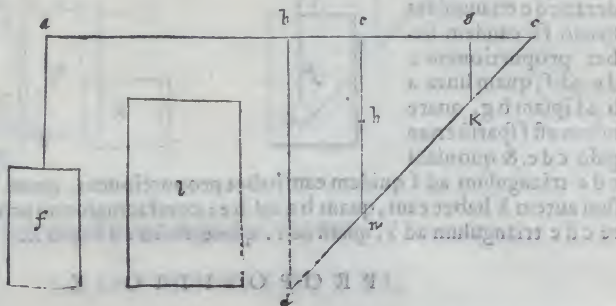
PROPOSITIO XI.

SIT rurſus a b c libra, cuius medium b; & trapezium b d K g, quod ad puncta quidem b g angulos rectos habeat, latus uero d c in ipſum c tendens: & quam proportionem habet b a ad b g, eam habeat trapezium b d K g ad ſpatium l; ſuſpendaturq; trapezium ex libra in punctis b g: & f ſpatium ſuſpendatur in a, quod æqui-

 ponderet

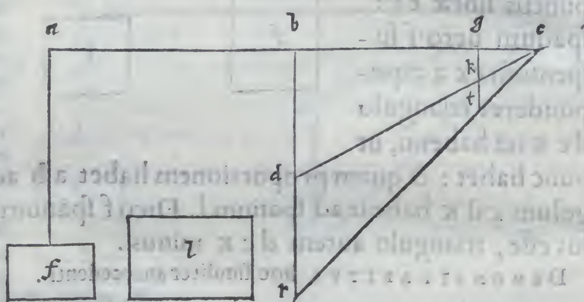
ponderet ipſi trapezio b d K g ita habenti, ut nunc ponitur. Dico f ſpatium minus eſſe ipſo l.

A SECETVR enim a c in e: ita ut quam proportionem habet dupla ipſius d b, & ipſa k g ad duplam ipſius k g, & ad b d, eam habeat e g ad b e: & per e ducta e n æquidiſtans ipſi b d ſecetur bifariam in h. trapezii igitur b d k g centrum grauitatis eſt punctum h, ut oſtenſum eſt in mechanicis. Itaque ſi b d k g trapezium in e ſuſpendatur, & ſoluatur à b g punctis: manet eandem habens cõſtitutionem; ex iis, quæ ſuperius demonſtrata ſunt: & æquiponderabit ſpatio f. Quoniam igitur æquiponderat b d k g trapezium ſuſpenſum ad e, ſpatio f ad a ſuſpenſo: erit ut b a ad be, ita trapezium b d k g ad f ſpatium. maiorem ergo proportionem habet b d k g trapezium ad ſpatium f, quàm ad l: quoniam & a b ad b e maiorem habet proportionem, quàm ad b g. quare ſpatium f minus erit l ſpatio. 9.quinti




PROPOSITIO XI.

SIT rurſus libra a c, cuius medium b: & trapezium K d t r latera quidem K d, t r habens in c tendẽtia, ipſa autem d r K t perpendicularia ad b c: cadatq; d r in b, & K t in g: Quam uero proportionem habet a b ad b g, habeat trapezium d K t r ad ſpatium l: & ſuſpendatur trapezium ex libra in punctis b, g, & f ſpatium in a; & æquiponderet ſpatium f trapezio d K t r, ſic habenti, ut nunc habet. ſimiliter iis, quæ dicta ſunt, oſtendetur ſpatium f minus eſſe ſpatio l.

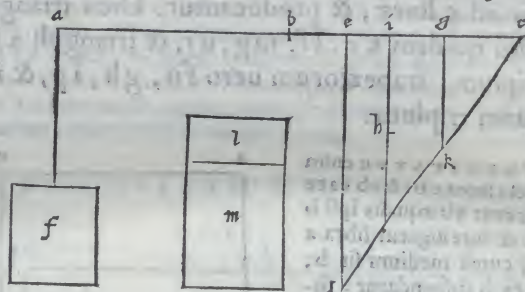



PROPOSITIO

PROPOSITIO XII.

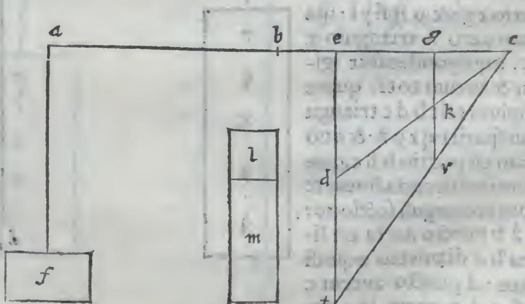
SIT rursus libra a c, cuius medium b: & d e K g trapezium, angulos quidem ad puncta e g rectos habens, latera autem K d, e g tendentia ad c; & quam proportionem habet a b ad b g, eam habeat trapezium d K e g ad spatium m: quamq; habet a b ad b e, habeat trapezium d K e g ad l. suspendatur autem d K e g trapezium ex libra in punctis e g: & f spatium suspendatur in a æquiponderans ipsi trapezio ita habenti, ut nunc ponitur. Dico f spatium spatio quidem l maius esse, ipso autem m minus.

SVMATVR enim trapezii d k e g centrum grauitatis, quod sit h. ( sumetur autem sicuti prius ): & ducatur h i ipsi d e æquidistans. Si igitur trapezium suspendatur ex libra ad i punctum: & ab ipsis e g punctis soluatur: manet eandem habens constitutionem, & æquiponderabit f spatio: ex iis quæ superius dicta sunt. Itaque quoniam trapezium suspensum ad i æquiponderat spatio f ad a suspenso: eandem habebit proportionem trapezium ad f, quam a b ad b i. manifestum ergo est trapezium d k e g ad l maiorem habere proportionem, quàm ad f; & ad ipsum m minorem, quàm ad f. quare spatium f ipso quidem l maius est, ipso autem m minus.




PROPOSITIO XIII.

SIT rursus libra a c, in cuius medio b: & trapezium K d t r, quod latera quidem K d, t r ad punctum c tendentia habeat, ipsa autem d t, K r perpendicularia ad b c: suspendaturq; trapezium ex libra in punctis e g: & f spatium in a suspendatur, æquiponderans ipsi d K t r trapezio ita habenti, ut nunc ponitur: & quam proportionem habet a b ad

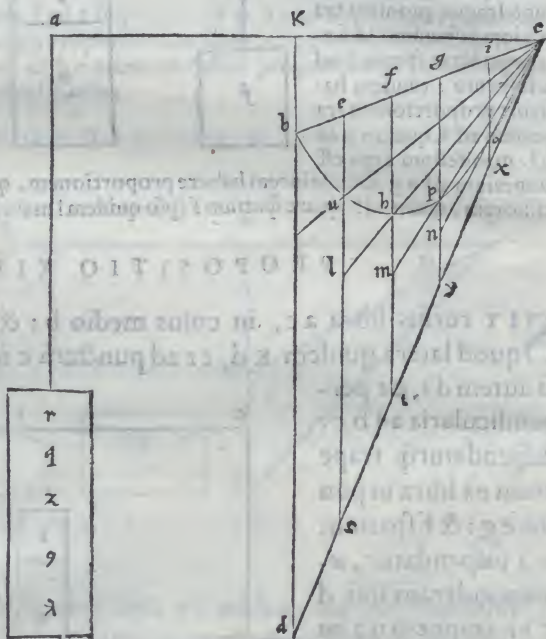


b c, eam trapezium d K t r habeat ad l ſpatium. quam uero habet a b ad b g, eandem habeat idem trapezium ad ſpatium m. ſimiliter antedictis, oſtendetur f ſpatium, ſpatio l maius, & ipſo m minus.

## PROPOSITIO XIIII.

SIT portio b h c contenta recta linea, & rectanguli coni ſectione: ſit autem prius linea b c ad angulos rectos ipſi diametro: & ducatur à puncto quidem b linea b d diametro æquidiſtans; à puncto autem c ipſa c d, tangens coni ſectionem in c. erit igitur triangulum b c d rectangulum. ſecetur etiam b c in partes quotcunque b e, e f, f g, g i, i c: & à ſectione ducantur diametro æquidiſtantes e s, f t, g y, i x; a punctis autem, in quibus hæ ſecant coni ſectionem ducantur ad c lineæ, & producantur. Dico triangulum b d c trapeziorum quidem K e, l f, m g, n i, & trianguli x i c minus eſſe, quàm triplum; trapeziorum uero f u, g h, i p, & i o c trianguli maius, quàm triplum.

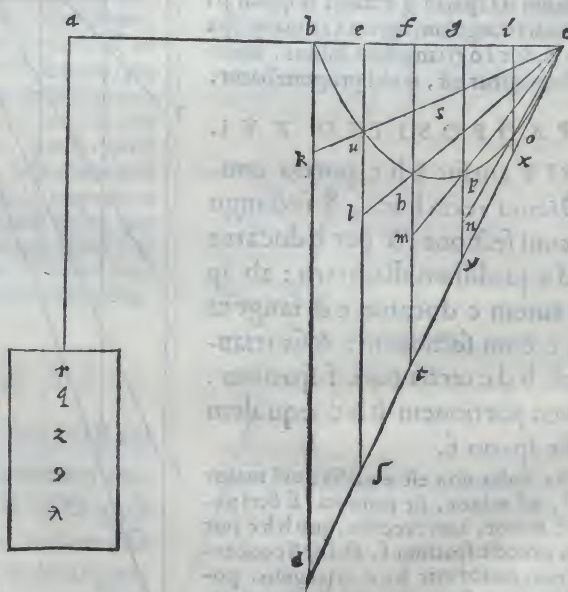
PRODVCATVR enim
recta linea c b: & ab ea re
ſecetur a b æqualis ipſi b
c: & intelligatur libra a
c, cuius medium ſit b;
& ex b ſuſpendatur: ſu-
ſpendatur quoque b d c
triangulum ex libra ad
puncta b c: & ex altera
parte ad a ſuſpendan-
tur ſpatia r q z 9 λ: & 
æquiponderet r ſpatium
trapezio d e, ita haben-
ti: & ſpatium q æquipon
deret trapezio f s: & z tra
pezio t g: & 9 ipſi y i: ſpa
tium uero λ triangulo x
i c. æquiponderabit igi-
A tur & totum toti. quare
triplum erit b d c triangu
lum ſpatii r q z 9 λ: & quo
niam eſt portio b h c, quæ
continetur recta linea, &
coni rectanguli ſectione:
& à b puncto ducta eſt li-
nea b d diametro æquidi
ſtans: à puncto autem c
ipſa c d tangens in c re-
ctanguli coni ſectionem:
ducta eſt præterea, & alia



quædam linea s e æquidiſtans diametro : eandem habet proportionem b c ad b e, B
quam s e ad e u . quare & b a ad b e habet eandem, quam d e trapezium ad ipſum C
k e. ſimiliter oſtendetur b a ad b f eandem habere proportionem, quam trapezium s f ad l f; & ad b g eandem, quam t g ad m g; ad b i uero eandem quam y i ad n i. Quoniam igitur trapezium d e angulos quidem ad puncta b e, rectos habet; latera autem ad c punctum tendentia: & æquiponderat ſpatium r ſuſpenſum ex libra in pũcto a ipſi trapezio ita habenti, ut nunc ponitur: eſtq; ut b a ad b e, ita d e trapezium ad k e: maius erit k e ſpatium ſpatio r; hoc enim oſtenſum eſt. Rurſus & tra- D
pezium f s ad puncta f e angulos rectos habet, & latus s t tendens ad c: ipſi autem ita habenti, ut nunc habet, æquiponderat q ſpatium ex libra ſuſpenſum in a: & eſt E
ut b a ad b e, ita f s trapezium ad trapezium f u; & ut a b ad b f, ita f s trapezium ad ipſum l f. ſpatium igitur q trapezio quidem l f minus eſt, trapezio autem f u ma F
ius; nanque & hoc eſt oſtenſum. Eadem ratione & z ſpatium minus eſt trapezio m g, & trapezio h g maius: & ſpatium 9 trapezio y i minus, & maius ipſo p i: ſimili- G
ter etiam λ ſpatium triangulo x i c minus eſt, & triangulo c i o maius. Itaque quoniam trapezium k e maius eſt r ſpatio: & l f trapezium maius ſpatio q: & m g ſpatio z: et n i ipſo 9: triangulum autem x i c ſpatio λ: manifeſtum eſt et omnia dicta ſpatia
ſpatio r q z 9 λ eſſe maiora. ſed ſpatium r q z 9 λ tertia pars eſt b c d trianguli. trian 6.huius
gulum igitur b c d minus eſt, quàm triplum trapeziorum k e, l f, m g, n i, et trianguli x i c. Rurſus quoniam f u trapezium ſpatio q minus eſt: et h g ſpatio z: et p i ipſo 9: triangulum uero i o c ſpatio λ: conſtat et omnia ſpatia minora eſſe λ 9 z q ſpatio. Quare triangulum b d c maius eſt, quàm triplum trapeziorum u f, h g, i p, et i c o trianguli: minus autem, quàm triplum antedictorum.

## PROPOSITIO XV.

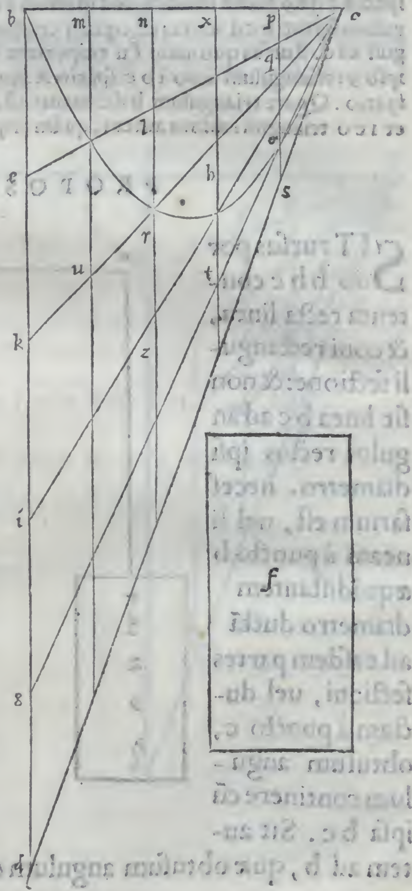
SIT rurſus portio b h c contenta recta linea, & coni rectanguli ſectione: & non ſit linea b c ad angulos rectos ipſi diametro. neceſſarium eſt, uel lineam à puncto b æquidiſtantem diametro ductã ad eaſdem partes ſectioni, uel ductam à puncto c, obtuſum angulum continere cũ ipſa b c. Sit autem ad b, quæ obtuſum angulum continet: & à b puncto ducatur




linea

linea b d diametro æquidiſtans : & ab ipſo c ducatur c d tangens coni ſectionem in c : ſeceturq́; b c in partes æquales quotcunque, b e, e f, f g, g i, i c : & à punctis e f g i ducantur æquidiſtantes diametro e ſ, f t, g y, i x, à punctis uero, in quibus ſecant coni ſectionem, ducantur ad c lineæ, & producantur. Dico & nunc quoque triangulum b d c trapeziorum quidem b u, l f, m g, n i, & trianguli c i x minus eſſe, quàm triplum; ipſorum autem f u, g h, i p, & c o i trianguli maius, quàm triplum.

PRODVCATVR d b in alteram partem : atque ad ipſam à puncto c ducatur perpendicularis c k : & ſumatur lineæ c k æqualis a k. Intelligatur autem rurſus libra a c, cuius medium ſit k : & ſuſpendatur ex k : ſuſpendaturq́; triangulum c k d ex dimidia libra in c k punctis : ita ut nunc ponitur : & ex altera parte ſuſpendantur in a puncto ſpatia r q z 9 λ : & æquiponderet ſpatium r trapezio d e, ſic habenti, ut nunc poſitum eſt : & q æquiponderet f s trapezio : & z trapezio t g : & 9 ipſi y i : & λ, c i x triangulo ; æquiponderabit
A autem & totum toti. quare d b c trian
B gulum triplum erit ſpatii r q z 9 λ. ſimiliter, ut prius, oſtendetur b u trape
C zium ſpatio r maius : & trapezium h e maius ſpatio q : trapezium autem f u minus eodem : & trapezium m g maius ſpatio z, & ipſum g h minus : & inſuper trapezium n i ſpatio 9 maius, & ipſum p i minus: triangulum autem x i c maius ſpatio λ; & c i o triangulum minus. manifeſtum igitur eſt, quod proponebatur.




## PROPOSITIO XVI.

SIT rurſus b h c portio contenta recta linea, & rectanguli coni ſectione : & per b ducatur b d æquidiſtans diametro : ab ipſo autem c ducatur c d tangens in c coni ſectionem : & ſit trianguli b d c tertia pars f ſpatium. Dico portionem b h c æqualem eſſe ſpatio f.

SI enim non eſt æqualis; uel maior eſt, uel minor. ſit primum, ſi fieri poteſt, maior. Iam exceſſus, quo b h c portio excedit ſpatium f, ſibi ipſi coacer
A uatus, maior erit b c d triangulo. poteſt autem ſumi aliquod ſpatium minus exceſſu; quod ſit pars trianguli b d c : ſitq; b c e triangulum, & minus dicto

linea

excessu, & pars trianguli b d c. erit & b e pars eadem ipsius b d. Itaque diuidatur B
b d in totidem partes, & diuisionum puncta sint g i k: & ab ipsis g i k ad c lineæ iungantur. secabunt hæ coni sectionem, cum c d ipsam tangat in c. per puncta autem sectionum ducantur lineæ æquidistantes diametro m u, n r, x h, quæ & æquidistantes erunt ipsi b d. Quoniam igitur triangulum b c e minus est excessu, quo b h c portio excedit f spatium: patet utraque hæc, spatium f, & triangulum b c e minora esse ipsa portione. triangulo autem b c e æqualia sunt trapezia, per quæ coni sectio permeat, uidelicet m e, u l, h r, h o, & triangulum c o s: nam trapezium m e commune est: & trapezium m l æquale trapezio u l: & trapezium l x æquale trapezio h
r: & q x ipsi o h: & triangulum c q p triangulo c o s. spatium ergo f minus est tra C
peziis m l, x r, p h, & triangulo p o c. Sed triangulum b d c triplum est spatii f. quare b d c triangulum minus est, quam triplum trapeziorum m l, x r, p h, & p o c trian
guli: quod fieri minime potest: ostensum est enim maius, quam triplum. non igitur D
portio b h c maior est f spatio. Dico etiam neque esse minorem. nam si fieri potest, sit minor. Rursus excessus, quo spatium f excedit b h c portionem, ipse sibi ipsi coaceruatus maior est triangulo b d c. Itaque potest sumi spatium, minus dicto excessu, quod sit pars b d c trianguli: sitq; triangulum b c e minus excessu; & pars trianguli b c d: & alia eadem construantur. Quoniam igitur b c e triangulum minus est excessu, quo spatium f excedit b h c portionem: triangulum b e c, & portio b h c, utraque minora sunt spatio f. est autem spatium f minus quadrilateris e m, u n, z x, p t, & triangulo c p s: nam triangulum b d c ipsius f tri-
plum est; & dictorum spatiorum minus, E
quam triplum, ut proxime ostendimus. triangulum ergo b c e, & portio b h c minora sunt quadrilateris e m, u n, z x, p t, & c p s triangulo. quare ablato commu
ni, uidelicet portione ipsa, minus erit A
triangulum c b e residuis spatiis: quod quidem fieri non potest. ostensum enim est b e c triangulum æquale trapeziis e m, u l, h r, h o, & triangulo c o s, quæ sunt maiora dictis spatiis. non igitur portio b h c minor est f spatio, neque maior, ut ostensum est. quare relinquitur eidem esse æqualem.

## PROPOSITIO XVII.

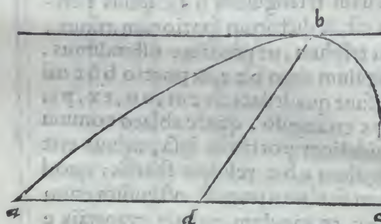
HOC ostenso manifestum est, omnem portionem contentam recta linea, & rectanguli coni sectione, sesquitertiam esse triangnli, qui basim habeat portioni eandem, & æqualem altitudinem.

Sit enim portio contenta recta linea & rectanguli coni sectione, cuius uertex h punctum: & in ipsa inscribatur triangulum b h c eandem basim habens portioni,
A & altitudinem æqualem. Quoniam igitur punctum h uertex est portionis: recta linea ab h ducta æquidistans diametro bifariam secat ipsam b c; & b c æquidistans est lineæ sectionem tangenti in h. ducatur autem e h linea æquidistans diametro: & à puncto b ducatur b d eidem æquidistans: & à c ipsa c d tangens coni sectionem in c. Itaque quoniam k h æquidistat diametro: ipsa autem c d tangit sectionem in c: &
B e c æquidistat lineæ sectionem tangenti in h: triangulum b d c quadruplum est trianguli b h c. & quoniam triangulum b d c ipsius b h c portionis est triplum: patet b h c portionem sesquitertiam esse trianguli b h c.

C Portionum quæ recta, & curua linea continentur, basim uoco ipsam rectam; altitudinem uero, maximam perpendicularem à curua linea ad basim usque portionis ductam; & uerticem, punctum, à quo maxima perpendicularis ducitur.

## PROPOSITIO XVIII.

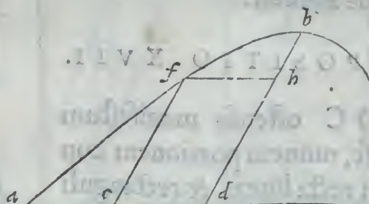
Si in portione, quæ recta linea, & rectanguli coni section e continetur, à media basi ducatur linea diametro æquidistans: uertex portionis erit punctum, in quo linea diametro æquidistans ducta coni sectionem secat.




Sit enim portio a b c contenta recta linea, & rectanguli coni sectione: & à media a c ducatur d b diametro æquidistans. Quoniam igitur in rectanguli coni sectione ducta est d b diametro æquidistans: & æquales sunt a d, d c: constat lineam a c
A æquidistantem esse ei, quæ in b coni sectionem contingit. quare ductarum a sectione ad ipsam a c perpendicularium, maxima erit, quæ à b puncto ducitur. ergo punctum b uertex est portionis.

## PROPOSITIO XIX.

Si in portione recta linea, & rectanguli coni sectione contenta ducantur duæ lineæ dimetro æquidistantes; una quidem à media basi; altera uero à medio dimidiæ basis: ducta à media basi, eius, quæ à medio dimidiæ basis ducitur, longitudine erit sesquitertia.



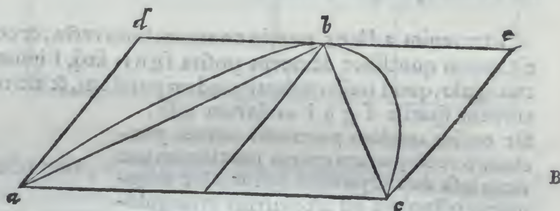

Sit enim a b c portio contenta recta linea, & coni rectanguli sectione: & ducantur

tur æquidiſtantes diametro, linea quidem b d à media a c, ipſa autem e f à media a d: ducatur quoque f h æquidiſtans ipſi a c. Quoniam igitur in coni rectanguli ſectione linea b d diametro æquidiſtans ducta eſt: ipſæ autem a d, f h æquidiſtantes ſunt lineæ contingenti in b: manifeſtum eſt eandem habere proportionem b d ad b h longitudine, quam a d ad f h poteſtate. quadrupla igitur eſt & b d ipſius b h longitudine. ex quo patet, ſexquitertiam eſſe longitudine b d ipſius e f. A

## PROPOSITIO XX.

SI in portione recta linea, et coni rectanguli ſectione contenta triangulum deſcribatur, eandem portioni baſim habens, & altitudinem eandem: maius erit deſcriptũ triangulũ dimidio portionis.

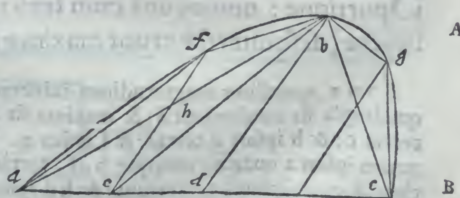
SIT enim portio a b c, qualis dicta eſt: & in ipſa deſcribatur triangulum a b c eandem, quam tota portio baſim habens, & æqualem altitudinem. quoniam igitur triangulum baſim habet eandem portioni, & altitudinem eandem: neceſſe eſt b punctum uerticem eſſe portionis. æquidiſtans eſt igitur linea a c lineæ in b pũcto ſectionem tangenti. Ducatur d e per b, æquidiſtaus ipſi a c: & à punctis a c æquidiſtantes diametro ducantur a d, c e. cadent igitur ipſæ extra ſectionem. & quoniam a b c triangulum dimidium eſt parallelogrammi a d e c: patet maius eſſe, quàm dimidium dictæ portionis. quare fieri poteſt, ut in hac portione multiangula figura deſcribatur: ita ut reliquæ portiones quolibet propoſito ſpatio ſint minores. auferentes enim ſemper ſpatium maius dimidio: & propterea minuentes ſemper reliquas portiones, tandem eas quolibet ſpatio propoſito minores reddemus. A B C




## PROPOSITIO XXI.

SI in portione recta linea, & coni rectanguli ſectione contentã triangulum deſcribatur, eandem habens baſim portioni, & altitudinem eandem: deſcribantur autem & alia triangula in reliquis portionibus, quæ baſim eandem ipſis habeant, & eandem altitudinem: alterutrius triangulorum, quæ in reliquis portionibus deſcribuntur, octuplum erit triangulum in tota portione deſcriptum.

SIT a b c portio, qualis dicta eſt: & ſecetur a c bifariam in d: ducatur autem b d æquidiſtans diametro. ergo punctum b uertex eſt portionis: & propterea a b c triangulum eandem habet portioni baſim, & altitudinem eandem. Rurſus ſecetur bifariam a d in puncto e: & ducatur e f diametro æquidiſtans: ſecetur præterea a b in h. punctum igitur f uertex eſt portionis a f A B

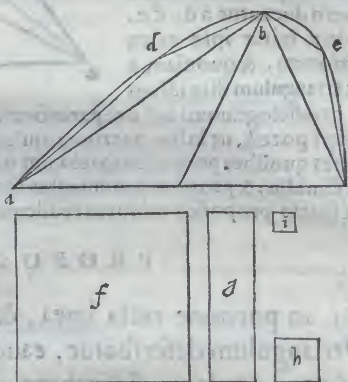


b. & triangulum a f b eandem basim habet a f b portioni, & eandem altitudinem:
C Ostendendum est, triangulum a b c octuplum esse trianguli a f b. est enim b d ipsius quidem e f sesquitertia: ipsius autem e h dupla. dupla est igitur e h ipsius hf. quare & a e b triangulum duplum est trianguli f b a, nam triangulum a e h trianguli a h f est duplum: & h b e item duplum ipsius f h b. triangulum ergo a b c trianguli a f b octuplum est. Similiter quoque ostendetur octuplum esse trianguli in portione b g c descripti.

## PROPOSITIO XXII.

SI sit portio contenta recta linea, & coni rectanguli sectione: spatia autem quotlibet in quadrupla proportione deinceps ponantur: & sit maximum eorum æquale triangulo, quod basim habeat portioni eandem, & eandem altitudinem: omnia dicta spatia minora erunt ipsa portione.

SIT enim a d b e c portio contenta linea recta, & coni rectanguli sectione: spatia autem quotlibet deinceps posita f g h i: sitq; f ipsius g quadruplum, & æquale triangulo, quod basim habeat eandem portioni, & altitudinem eandem. Dico portionem spatiis f g h i maiorem esse. Sit totius quidem portionis uertex punctum b: reliquarum autem portionum uertices ipsa d e. Quoniam igitur a b c triangulum octuplum est alterutrius triangulorum a d b, b e c: constat quadruplum esse utrorumque. & quoniam a b c triangulum æquale est spatio f: erunt & triangula a d b, b e c spatio g æqualia. Similiter autem ostendetur, & triangula in reliquis portionibus descripta, eandemq; basim habentia ipsis, & altitudinem eandem, spatio h æqualia esse: & demum triangula descripta in posterioribus portionibus æqualia esse spatio i. Omnia igitur proposita spatia æqualia erunt figuræ cuipiam multiangulæ in portione descriptæ. quare manifestum est ea esse minora ipsa portione.




## PROPOSITIO XXIII.

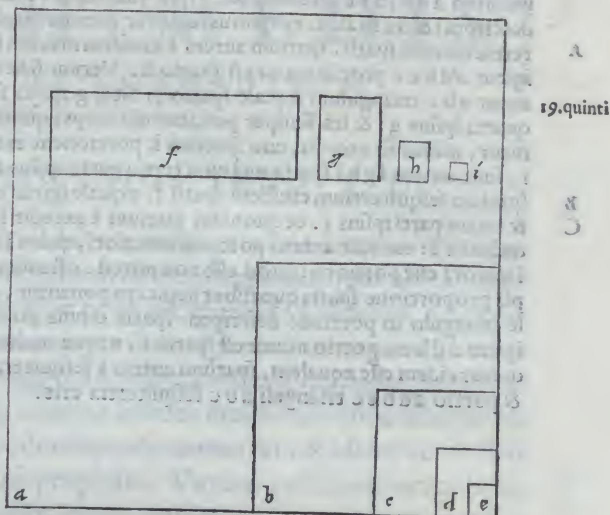
SI quotlibet magnitudines ponantur deinceps in quadrupla proportione: omnes unà cum tertia parte minimæ illarum inter se iunctæ, sesquitertiæ erunt maximæ magnitudinis.

SINT quotlibet magnitudines deinceps positæ a b c d e, quarum unaquæque quadrupla sit consequentis: & maxima sit a: sit autem f tertia pars ipsius b: & g tertia c: & h ipsius d tertia: & i ipsius e. Quoniam igitur f ipsius b tertia est: b autem ipsius a quarta: utræque b, f, tertia pars sunt ipsius a. Eadem quoque ratione & g, c, ipsius b tertia sunt: & h d ipsius c: & c e ipsius d. Quare omnes magnitudines

gnitudines b c d e f g h i tertia pars sunt magnitudinum omnium a b c d. sunt autem & f g h tertia ipsarum b c d. & reliquæ. igitur b c d e i magnitudinis reliquæ uidelicet ipsius a tertia sunt. ex quo patet, omnes magnitudines a b c d e & i, hoc est tertiam ipsius e, sesquitertias esse ipsius a magnitudinis.

A

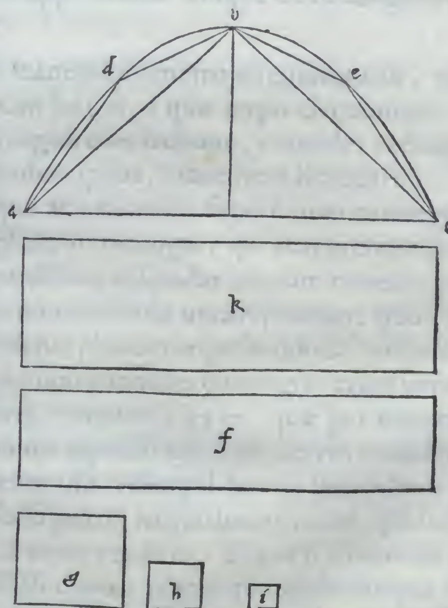
19.quinti




## PROPOSITIO XXIIII.

Qvælibet portio recta linea, & rectanguli coni sectione contenta sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim habentis, & altitudinem æqualem.

Sit enim portio a d b e c contenta recta linea, & rectanguli coni sectione: Sitq; triangulum a b c, quod habeat eandem basim portioni, & æqualem altitudinem: ipsius autem trianguli a b c sesquitertium sit k spatium. Ostendendum est k æquale esse portioni a d b e c. si enim non est æquale, uel maius est, uel minus. Sit primum, si esse potest a d b e c portio maior spatio k: describantur autem a d b, b e c triangula, ut dictum est: & rursus in reliquis portionibus alia triangula describantur, eandem ipsis basim habentia, & altitudinem eandem: & semper in iis, quæ postremo fiunt, portionibns describantur duo triangula basim habentia eandem ipsis, & eandem altitudinem: erunt tandem portiones reliquæ minores excessu, quo portio a d b e c excedit k spatium. Quare descripta multiangula figura maior erit k spatio; quod esse non potest. sunt enim posita deinceps spatia in quadrupla proportione: & primum quidem a b c triangulum quadruplum est trian



gulorum a d b, b e c: deinde eadem ipſa quadrupla eorum, quæ in ſequentibus ſunt deſcripta: & ita in aliis. ex quibus ſequitur, omnia ſpatia minora eſſe, quàm ſeſqui-
A tertia maximi ſpatii. ſpatium autem k eiuſdem maximi ſpatii eſt ſeſquitertium. non igitur a d b e c portio maior eſt ſpatio k. Verum ſi fieri poteſt, ſit minor: & ponatur a b c triangulum æquale ſpatio f: Sitq́; g ipſius f pars quarta: & ſimiliter h quarta ipſius g: & ita ſemper ponatur deinceps, quouſque quod ultimo loco ponitur, minus ſit exceſſu, quo ſpatium k portionem excedit. et ſit minus ſpatium i. ſunt autem f g h i ſpatia unà cum tertia parte ipſius i, ſpatii f ſeſquitertia: & k
B ſpatium ſeſquitertium eiuſdem ſpatii f. æquale igitur eſt k ſpatium ipſis f g h i,
C & tertiæ parti ipſius i. et quoniam ſpatium k excedit f g h i ſpatia minori exceſſu, quàm ſit i: excedit autem portionem maiori, quàm i: manifeſtum eſt ſpatia f g h i maiora eſſe portione: quod eſſe non poteſt. oſtenſum nanque eſt, Si in quadrupla proportione ſpatia quotlibet deinceps ponantur, quorum maximum ſit æquale triangulo in portione deſcripto: ſpatia omnia minora eſſe ipſa portione. non igitur a d b e c portio minor eſt ſpatio k, neque maior, ut oſtenſum eſt. quare ſequitur eidem eſſe æqualem. ſpatium autem k ſeſquitertium eſt trianguli a b c. ergo & portio a d b e c trianguli a b c ſeſquitertia erit.

# ARCHIMEDIS

## LIBER DE CONOIDIBVS, *ET SPHAEROIDIBVS.*

## ARCHIMEDES DOSITHEO S. D.



ITTO ad te conſcriptas in hoc libro reliquorum theorematum demonſtrationes, quas nō habebas in iis, quæ prius ad te miſi; & aliorum, quæ poſterius inuenta ſunt. quorum cum antea quidem ſæpe aggreſſus eſſem contemplationem, uiderenturq; omnino eorum inuētiones difficultatem habere, diu ſuſpenſo animo fui: & idcirco cum aliis edita non fuerunt hæc ipſa propoſita. Verum poſtea maiori adhibita diligentia, ea, de quibus antea dubitaueram, tandem inueni. Quæ autem ex prioribus theorematibus reſtabant, de rectangulo conoide propoſita erant. at quæ nunc inuenta ſunt, ad conoides obtuſiangulum, & ſphæroidas figuras attinent: quarum aliquas quidē oblongas, aliquas uero latas appellamus. Itaque de rectangulo conoide hæc poſita fuerant.

SI rectanguli coni ſectio manente diametro circunducatur, quouſque rurſus redeat in eum locum, à quo cœpit circumduci: figuram comprehenſam rectanguli coni ſectione, conoides rectangulum appellari: & axem quidem ipſius, manentem diametrum; uerticem uero punctum, in quo axis conoidis ſuperficiem contingit. Si rectangulum conoides planum contingat: ipſi autem contingenti plano alterum planum æquidiſtans abſcindat aliquam conoidis portionem: baſim quidem portionis abſciſſæ uocari planum, quod ipſa conoidis ſectione in abſcindente plano comprehenditur: uerticem, punctum, in quo alterum planum conoides contingit: axem uero rectam lineam intra portionem receptam, ex ea, quæ per uerticem portionis ducta ſit axi conoidis æquidiſtans. Hæc autem conſideranda proponebantur. Cur ſi conoidis rectanguli portio abſcindatur plano erecto ſuper axem: abſciſſa portio ſeſquialtera ſit coni, qui baſim habeat portioni eandem, & axem eundem. Et cur ſi à conoide rectangulo duæ portiones abſcindantur planis quomodocunque ductis: abſciſſæ portiones inter ſe duplam eius, quæ eſt axium, pro-

[Margin notes: A (beside "Si rectanguli coni"); B (beside "figuram comprehensam"); C (beside "conoidis sectione in abscindente plano"); 23. huius (beside "proponebantur"); 26. huius (beside "habeat portioni")]

portionem

D portionem habeant. At de obtusiangulo conoide hæc ponimus. Si in eodem plano sint obtusi anguli coni sectio, eiusq; diameter, & lineæ, quæ sunt proximæ coni obtusianguli sectioni: manente autem diametro circumducatur planum, in quo sunt dictæ lineæ quousque rursus in eundem locum, à quo cœpit moueri, restituatur: rectas lineas, quæ coni obtusianguli sectioni proximæ sunt, manifeste conum comprehendere æquicrurem; cuius uertex erit punctum, in quo lineæ proximæ conueniunt, & axis diameter manens. figuram uero obtusianguli coni sectione comprehensam, conoides obtusiangulum uocari; cuius axis erit diameter manens, & uertex punctum illud, in quo axis conoidis superficiem contingit. At conum comprehensum lineis sectioni coni obtusianguli proximis, continentem conoides appellari. lineam autem rectam, quæ interiicitur inter conoidis uerticem, & uerticem coni continentis conoides, ad axem adiectam
E dici. Et si obtusiangulum conoides planum contingat: ipsi autem contingenti plano alterum planum æquidistanter ductum abscindat conoidis portionem: basim quidem abscissæ portionis uocari planum, quod ipsa conoidis sectione in abscindente plano comprehenditur: & uerticem, punctum illud, in quo planum conoides contingit: axem uero lineam intra portionem receptam, ex ea, quæ ducta sit per uerticem portionis, & uerticem coni continentis conoides:
& quæ inter dictos uertices interiicitur rectam lineam ad axem adie
F ctam appellari, Omnia conoidea rectangula sunt similia. obtusian-
G gulorum uero conoideon similia dicuntur ea, quorum & coni conti
27.huius nentes similes sunt. Proponuntur autem hæc consideranda. Cur si conoidis obtusianguli portio abscindatur plano erecto super axem: abscissa portio ad conum basim eandem habentem ipsi, & axem eundem, eam habeat proportionem, quam utraque linea: & quæ æqualis est axi portionis; & quæ tripla lineæ ad axem adiectæ, habet ad lineam utrisque æqualem: & axi portionis, & ei, quæ dupla est li
28. huius neæ ad axem adiectæ. Et cur si conoidis obtusianguli portio abscindatur plano non erecto super axem: abscissa portio ad figuram basim eandem habentem ipsi, & eundem axem (quæ quidem figura sit coni portio) eam proportionem habeat, quam utraque linea: & quæ æqualis est axi portionis, & quæ tripla lineæ ad axem adiectæ, ad lineam utrisque æqualem: & axi portionis, & duplæ lineæ ad axem adiectæ. De sphæroidibus uero figuris hæc ponimus. Si acuti anguli coni sectio manente eius maiore diametro circumducta, restituatur rursus in eum locum, à quo moueri cœpit: figuram descriptam

ſcriptam à ſectione coni acuti anguli, ſphæroides oblongum appellari. Quòd ſi minore diametro manente, circumducta coni acuti anguli ſectio rurſus in eum locum reſtituatur, à quo moueri cœpit: figuram deſcriptam à coni acutianguli ſectione, ſphæroides latum uocari. Vtriuſque autem ſphæroidis axem quidem dici, manentem diametrum: uerticem, punctum, in quo axis ſphæroidis ſuperficiem contingit: centrum, axis medium: diametrum uero, lineam, quæ per centrum ducitur ad rectos angulos ipſi axi. Et ſi ſphæroidum figurarum quamlibet plana æquidiſtantia contingãt, quæ ipſas G
non ſecent: aliud autem planum contingentibns planis æquidiſtans ducatur, ſecansq; ipſum ſphæroides: portionum factarum baſim quidem uocari planum, quod ipſa ſphæroidis ſectione in ſecante plano comprehenditur: uertices, puncta in quibus plana æquidiſtantia ſphæroides contingunt: axes uero, rectas lineas in portionibus receptas ex ea, quæ uertices ipſarum coniungit. Verum enimuero 17.huius
plana ſphæroides contingentia in uno tantum puncto ipſius ſuperficiem contingere; & rectam lineam contactus cõiungentem per cen 18.huius
trum ſphæroidis tranſire; inferius demonſtrabitur. Sphæroidum figurarum ſimiles illas dici, quarum axes ad diametros eandem proportionem habent. Portiones autem ſphæroidum, & conoidum figurarum ſimiles, quæ à ſimilibus figuris abſciſſæ, baſes ſimiles habent; quarumq; axes ſiue erecti ſuper baſium ſuperficies, ſiue cum diametris baſium conſimilibus æquales angulos continentes, ad conſimiles diametros, eandem habent proportionem. At uero de ſphæroidibus figuris hæc proponuntur conſideranda. Cur ſi aliqua ſphæ 29.huius
roidum figurarum ſecetur plano per centrum ducto, & erecto ſuper axem: earum, quæ fiunt, portionum, utraque dupla ſit coni 33.huius
baſim habentis eandem ipſi, & axem eundem. Si autem ſecetur plano ſuper axem erecto, ſed non ducto per centrum: portionum factarum, maior quidem ad conum baſim habentem eandem ipſi, & axem eundem, eam habeat proportionem, quam linea his utriſque æqualis: & dimidiæ axis ſphæroidis, & axi minoris portionis ad axẽ
minoris portionis; minor uero portio ad conum eandem ipſi baſim 31.huius
habentem, & eundem axem, eam proportionem habeat, quam linea utriſque æqualis; & dimidiæ axis ſphæroidis, & axi maioris portionis ad axem maioris portionis. Et cur ſi ſphæroidum figurarum 30.huius
aliqua ſecetur plano per centrum ducto, & non erecto ſuper axem: portionum, quæ fiunt, utraque dupla ſit figuræ baſim habentis eandem portioni, & axem eundem, ſit autem figura, coni portio. Quòd 34.huius
ſi

ſi ſphæroides ſecetur plano neque per centrum ducto, neque erecto ſuper axem: portionum factarum maior quidem ad figuram baſim habentem eandem portioni, & axem eundem, eam habeat proportionem, quam linea utriſque æqualis: & dimidiæ eius, quæ uertices portionum coniungit, & axi minoris portionis ad axem minoris
32.huius portionis, minor autem portio ad figuram eandem baſim habentem ipſi, & axem eundem, eam proportionem habeat, quam linea utriſque æqualis: & dimidiæ eius, quæ uertices coniungit portionum, & axi maioris portionis ad axem maioris portionis. ſit autem & in his
H figura, coni portio. Itaque demonſtratis dictis theorematibus, per ea ipſa inueniuntur theoremata multa, & problemata, quale eſt hoc. Sphæroidea ſimilia inter ſe, & portiones ſphæroideon ſimiles, & item conoideon, triplam eius, quæ eſt axium proportionem habent. Sphæroideon æqualium quadrata diametrorum ex contraria parte reſpondent ipſis axibus: & quorum quadrata diametrorum ex contraria parte reſpondent ipſis axibus: ſphæroidea æqualia ſunt. Problema autem eiuſmodi. A dato ſphæroide, uel conoide portionem abſcindere plano, quod ſit alteri dato plano æquidiſtans: ita ut portio abſciſſa æqualis ſit dato cono, aut cylindro, aut ſphæræ datæ. Præmittentes igitur & theoremata, & problemata, quæ ad illorum demonſtrationes ſunt neceſſaria, poſtea tibi ea, quæ propoſita ſunt, conſcribemus. Vale.

I SI conus plano ſecetur cum omnibus eius lateribus coeunti: ſectio uel erit circulus, uel coni acuti anguli ſectio. & ſi quidem ſectio circulus ſit: manifeſtum eſt, portionem à cono abſciſſam ad partes uerticis, conum eſſe. ſi autem ſit coni acutianguli ſectio: abſciſſa ab eo figura ad partes uerticis, portio coni uocetur. cuius portionis baſis quidem dicatur planum coni acutianguli ſectione comprehenſum; uertex, punctum, quod & coni uertex eſt; axis uero linea recta à uertice coni ad centrum ſectionis coni acutianguli perducta.
K Et ſi cylindrus duobus planis æquidiſtantibus ſecetur, quæ cum omnibus ipſius lateribus coeant: ſectiones uel erunt circuli, uel conorum acutiangulorum ſectiones æquales, & ſimiles inter ſe ſe. Quòd ſi ſectiones circuli ſint: conſtat abſciſſam à cylindro figuram inter plana æquidiſtantia interiectam, cylindrum eſſe. ſi uero ſint conorum acutiangulorum ſectiones: figura ab eo abſciſſa inter plana æquidiſtantia, portio cylindri uocetur. cuius portionis baſis quidem dicantur plana conorum acuti angulorum ſectionibus comprehenſa;
axis

axis autem recta linea, quæ sectionum conorum acutiangulorum centra cõiungit; atque erit hæc in eadem recta linea ipsi axi cylindri.

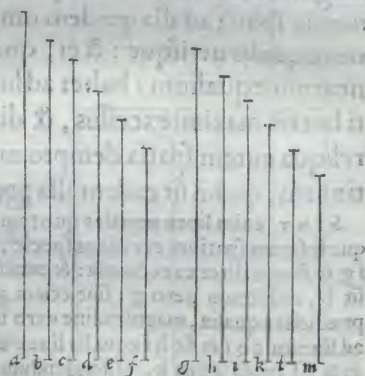
## PROPOSITIO I.

SI sint magnitudines quotcunque sese æqualiter excedentes, quarum excessus sit æqualis minimæ: sint autem & aliæ totidem magnitudines maximæ illarum æquales: Erunt magnitudines omnes maximæ illarum æquales, magnitudinum omnium se se æqualiter excedentium minores, quàm duplæ, reliquarum autem dempta maxima, maiores, quàm duplæ.

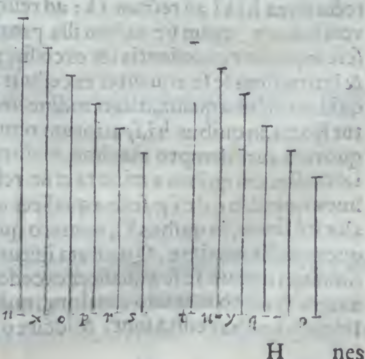
Hvivs uero demonstratio manifesta est. A

## PROPOSITIO II.

SI magnitudines quotcunque, totidem aliis magnitudinibus secundum quasque duas eandem habeant proportionem, similiter ordinatæ: referantur autem primæ magnitudines ad quasdam alias, quibuscunque proportionibus, uel omnes, uel earum aliquæ: posteriores quoque magnitudines referantur ad totidem alias sibi ipsis respondentes iisdem proportionibus: habebunt omnes primæ magnitudines ad eas omnes, ad quas referuntur, eandem proportionem, quam omnes posteriores magnitudines habent ad illas, ad quas itidem referuntur.




Sint quædam magnitudines a b c d e f, quæ totidem aliis magnitudinibus g h i k l m secundum quasque duas eandem habeãt proportionem: & habeat ipsa quidem a ad b eandem proportionem, quam g ad h: ipsa uero b ad c eandem, quam h ad i: & aliæ eodem modo. referantur autem a b c d e f ad alias magnitudines n x o p r s quibuscunque proportionibus: & ipsæ g h i k l m ad alias t u y q z 9 sibi respondentes iisdem proportionibus referantur: ita ut quã proportionem habet a ad n, eam habeat g ad t, & quam b ad x, habeat h ad u: & similiter in aliis. Ostendendum est, magnitudi-



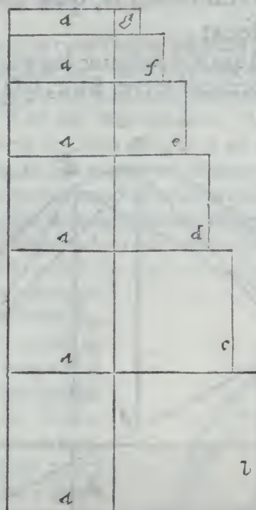
nes omnes a b c d e f, ad omnes n x o p r s eandem habere proportionem, quam omnes g h i k l m, ad omnes t u y q z 9. Quoniam enim n ad a eandem habet proportionem, quam t ad g: ipsa uero a ad b eandem habet, quam g ad h: & b ad
22. v. x, quam h ad u: habebit n ad x eandem proportionem, quam t ad u: & simili ratione x ad o eandem, quam u ad y: & alia similiter.
A Habent autem omnes a b c d e f ad a, eandem proportionem, quam omnes g h
B i k l m ad g: & a ad n, quam g ad t. Verum n ad omnes n x o p n s habet can-
22. v. dem, quam t ad omnes t u y q z 9. Omnes igitur a b c d e f ad omnes n x o p r s ean
C dem proportionem habent, quam omnes g h i k l m ad omnes t u y q z 9. Manifestum praeterea est, & si magnitudinum a b c d e f ipsae a b c d e referantur ad n x o p r: ipsa uero f ad nullam referatur: & magnitudinum g h i k l m ipsae g h i k l referantur ad t u y q z sibi respondentes, m uero ad nullam referatur. similiter omnes a b c d e f, ad omnes n x o p r eandem habere proportionem, quam omnes g h i k l m ad omnes t u y q z.

## PROPOSITIO III.

Si lineae quotcunque inter se se sint aequales: & ad unamquanque ipsarum accedat spatium excedens specie, quadrato: sint autem & excessuum latera se se aequaliter excedentia; & excessus aequalis minimo: sint item alia spatia, numero quidem praedictis aequalia, magnitudine uero unumquodque aequale maximo: habebunt haec omnia spatia ad illa quidem omnia minorem proportionem, quàm linea aequalis utrisque: & ei, quae est latus maximi excessus, & uni linearum aequalium: habet ad lineam utrisque aequalem; & tertiae parti lateris maximi excessus, & dimidiae unius linearum aequalium: ad reliqua autem spatia dempto maximo, maiorem habebunt proportionem, quàm sit eadem illa proportio.

SINT enim lineae aequales quotcunque, in quibus a: & accedat ad unamquanque ipsarum spatium excedens specie, quadrato: sint autem excessum latera b c d e f g se se aequaliter excedentia: & excessus sit aequalis minimo: & maximum quidem sit b, minimum uero g: sint etiam alia spatia, in quibus h i k l, numero quidem praedictis aequalia, magnitudine uero unumquodque aequale maximo, quod adiacet ad lineam a b: & sit h i aequalis lineae a: & k l aequalis lineae b: sitq; h i dupla ipsius i: & k l tripla ipsius k. Ostendendum est, spatia omnia in quibus h i k l ad omnia quidem alia spatia a b, a c, a d, a e, a f, a g, minorem habere proportionem, quàm recta linea h i k l ad rectam i k: ad reliqua autem spatia dempto maximo a b, maio-
A rem habere, quàm sit eadem illa proportio. Sunt enim aliqua spatia, in quibus a sese aequaliter excedentia: & excessus minimo est aequalis; quoniam & accessiones, & latitudines se se aequaliter excedunt. Sunt item alia spatia, in quibus h i, numero
2. huius quidem dictis aequalia, magnitudine uero unumquodque aequale maximo. Omnia igitur spatia, in quibus h i, spatiorum omnium, in quibus a, minora sunt, quã dupla: reli
B quorum autẽ dempto maximo, maiora quã dupla. & idcirco spatia omnia, in quibus i, omnibus, in quibus a minora erũt: reliquis aũt dẽpto maximo, maiora. Rursus sunt lineae quaedã b c d e f g se se aequaliter excedentes: & excessus est aequalis minimae: & aliae itẽ lineae, in quibus k l, numero quidẽ dictis aequales, magnitudine uero unaquae-
C que aequalis maximae. Quadrata igitur linearum omniũ aequaliũ maximae quadratorũ omnium linearũ se se aequaliter excedentium, minora sunt, quàm tripla: reliquorum autem dempto maximo, maiora, quàm tripla: hoc enim ostensum est in iis, quae de lineis spiralibus edita sunt. & idcirco spatia, in quibus k, spatiis omnibus, in qui-
bus

bus b c d e f g, ſunt minora: ſpatiis uero, in quibus c d e f g maiora. Quare & omnia ſpatia, in quibus i k ſpatiis omnibus, in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g, minora ſunt; ſpatii s uero, in quibus a c, a d, a e, a f, a g, maiora. Manifeſtum eſt igitur, ſpatia omnia, in quibus h i k l, ad ſpatia quidem, in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g, minorem proportionem habere, quã linea h l ad lineam i k; ad reliqua autẽ dempto eo, in quo a b, maiorem habere, quàm ſit eadem illa proportio.



S I quamlibet coni ſectionem rectæ lineæ contingant ab eodem puncto ductæ: ſint autem, & aliæ lineæ in coni ſectione, quæ lineis contingentibus æquidiſtent; & ſe ſe inuicem ſecent: rectangula dictarum linearum partibus contenta, ad quadrata contingentium eandem habent proportionem: rectangulum autem, quod alterius lineæ partibus continetur, reſpondebit quadrato contingentis illius, quæ dictæ lineæ æquidiſtet.

H o c autem oſtenſum eſt in conicis.

## PROPOSITIO IIII.

SI ab eadem rectanguli coni ſectione duæ portiones quomodocunque abſcindantur, quæ diametros æquales habeant: & ipſæ portiones æquales erunt; & triangula in ipſis deſcripta, baſim eandem

habentia portionibus, & altitudinem eandem. Diametrum autem uoco cuiuſcunque portionis rectam lineam, quæ lineas omnes baſi ipſius æquidiſtantes bifariam ſecat.

SIT rectanguli coni ſectio a b c, à qua abſcindantur duæ portiones a d e, h b c: ſitq; a d e portionis diameter d f: portionis autem h b c, ipſa b g: & ſint d f, b g æquales inter ſe. Oſtendendum eſt, & portiones a d e, b h c æquales eſſe: & triãgula eo, quo dictum eſt, modo in ipſis deſcripta, æqualia. Sit primum, quæ abſcindit alteram portionem h c ad rectos angulos ipſi diametro coni rectãguli ſe-
A ctionis: & ſumatur ea, iuxta quam poſſunt, quæ à ſectione ducuntur; dupla illius, quæ eſt uſque ad axem: ſitq; in qua m: & à puncto a ducatur a k perpendicularis
B ad d f. Quoniam igitur d f diameter eſt portionis: & a e bifariam ſecatur in f; & d f æquidiſtans eſt diametro ſectionis coni rectanguli: ſic enim bifariam ſecat omnes ipſi a e æquidiſtantes. Itaque quam proportionem habet quadratum a f ad quadratum a k, eam habeat n ad m. ergo quæ à ſectione ducuntur ad d f æquidiſtantes ipſi a e, poſſunt ſpatia adiacentia quidem ad lineam æqualem ipſi n, latitudinem uero habentia lineas illas, quas ipſæ a linea d f ad terminum d abſcindunt: oſtenſum nanque eſt hoc in conicis. poteſt igitur linea a f ſpatium æquale ei,
C quod continetur linea n & ipſa d f: & poteſt h g æquale ei, quod continetur li-
D
E neam & b g; quoniam h g perpendicularis eſt ad diametrum. quare & quadratum a f ad quadratum h g eandem habet proportionem, quam n ad m; quòd d f, b g poſitæ ſint æquales. habet autem quadratum a f ad quadratum a k eandem proportionem, quam n ad m. æquales igitur erunt h g, a k. ſed & æquales ſunt b g, d f.
F quare quod continetur lineis h g, b g æquale eſt contento ipſis a k, d f. ergo trian-
G gulum h b g triangulo d a f eſt æquale; & eorum dupla æqualia. trianguli autem a
H d e ſeſquitertia eſt portio a d e: & trianguli h b c ſeſquitertia ipſa h b c portio. ex quibus ſequitur, portiones æquales eſſe: & item triangula in ipſis deſcripta, æqualia. Si uero neutra earum, quæ portiones abſcindunt, fuerit ad angulos rectos ipſi diametro rectanguli coni ſectionis: aſſumpta ex diametro ſectionis coni rectanguli linea, quæ ſit æqualis diametro unius portionis. & ab eius extremo ducta ad angulos rectos ipſi diametro altera linea: portio abſciſſa utrique prædictarum æqualis
I erit. patet igitur, quod fuerat propoſitum.

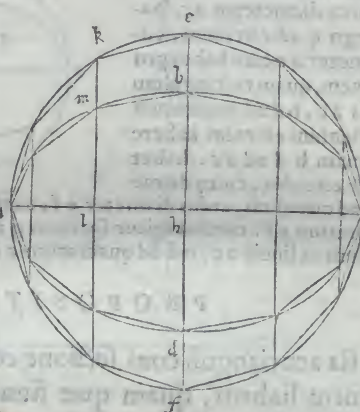
PROPOSITIO V.

QVodlibet ſpatium acutianguli coni ſectione contentum ad circulum, qui habeat diametrum æqualem maiori diametro acutianguli

tianguli coni sectionis, eandem habet proportionem, quam minor ipsius diameter ad maiorem; hoc est ad circuli diametrum.

Sit enim acutianguli coni sectio, in qua a b c d: diameter autem ipsius maior, in qua a c, minor, in qua b d: & sit circulus circa diametrum a c. Ostendendum est, spatium acutianguli coni sectione contentum ad circulum eandem habere proportionem, quam b d ad c a, hoc est ad e f. Itaque quam proportionem habet b d ad e f, eandem habeat circulus, in quo z ad a e c f circulum. Dico circulum z sectioni coni acutianguli esse æqualem. Si enim non est æqualis circulus z spatio coni acutianguli sectione contento: sit primum, si fieri potest, maior. potest autem in z circulo describi figura multorum angulorum, & numero parium, quæ maior sit spatio a b c d. Intelligatur iam descripta: sitq; in circulo, a e c f figura rectilinea similis ei, quæ in circulo z descripta est: & ab angulis ipsius perpendiculares ducantur ad a c diametrum: ea uero puncta, in quibus perpendiculares secant coni acutianguli sectionem, rectis lineis iungantur. erit igitur figura quædam rectilinea in coni acutianguli sectione descripta: & habebit ad figuram descriptam in circulo a e c f proportionem eandem, quam habet b d ad e f. Quoniam enim perpendiculares e h, k l in eandem proportionem secantur ad puncta m b: constat trapezium l e ad ipsum h m eandem habere proportionem, quam h e ad b h: & similiter unumquodque trapeziorum, quæ sunt in circulo ad unumquodque eorum, quæ sunt in coni acutianguli sectione, eandem habebit, quam e h ad b h. habent autem & triangula ad puncta a c, quæ sunt in circulo ad ea triangula, quæ sunt in coni acutianguli sectione, hanc eandem proportionem. Quare & tota figura rectilinea in a e c f circulo descripta ad totam figuram descriptam in coni acutianguli sectione, habebit eandem proportionem, quam e f ad b d. sed & eadem figura rectilinea ad figuram, quæ in z circulo est descripta eandem habet proportionem, quoniam & circuli eandem inter se habebant. figura igitur rectilinea in z circulo descripta æqualis est figuræ descriptæ in coni acutianguli sectione: quod fieri non potest; maior enim erat toto spatio sectione coni acutianguli contento. Sed sit, si fieri potest, minor. Rursus in coni acutianguli sectione potest describi figura multorum angulorum, & numero parium, quæ maior sit circulo z. describatur ergo: & ab angulis ipsius ad a c perpendiculares ductæ producantur ad circuli usque circumferentiam. Rursus erit figura quædam rectilinea in a e c f circulo descripta, quæ habebit ad figuram descriptam in coni acutianguli sectione proportionem eandem, quam e f ad b d. Itaque descripta & in z circulo simili figura, ostendetur, eam ipsam æqualem esse figuræ in coni acutianguli sectione descriptæ; quod quidem fieri non potest. non est igitur neque minor z circulus spatio coni acutianguli sectione contento. Quare constat dictum spatium ad a e c f circulum eandem habere proportionem, quam habet b d ad e f.

A B C D 1.& 2.xii F




PROPOSITIO

## PROPOSITIO VI.

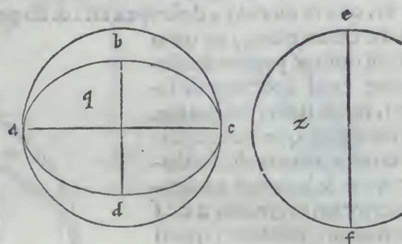
SPatium quodlibet acutianguli coni ſectione contentum, ad quemlibet circulum eam habet proportionem, quam rectangulum ex diametris ſectionis coni acutianguli factum, ad quadratum diametri circuli.

SIT enim ſpatium acutianguli coni ſectione contentum, in quo q: & ipſius ſectionis diametri ſint a c, b d; quarum maior a c: circulus autem ſit, in quo z: & eius diameter e f. Oſtendendum eſt, ſpatium q ad z circulum eam proportionem habere, quam rectangulum, quod fit ex lineis a c, b d habet ad quadratum e f.

A Circũſcribatur circulus circa diametrum a c. ſpatium ergo q ad circulum, cuius diameter a c eam habet proportionem, quam rectangulum ex lineis a c, b d ad quadratum

2.XII. a c. Oſtenſum eſt enim habere eam, quam b d ad a c. habet autem & circulus, cuius diameter a c ad circulum, cuius diameter e f, eam proportionem, quam a c quadratum

B ad quadratum e f. conſtat igitur ſpatium q ad z circulum habere eam, quam rectangulum ex lineis a c, b d ad quadratum e f.



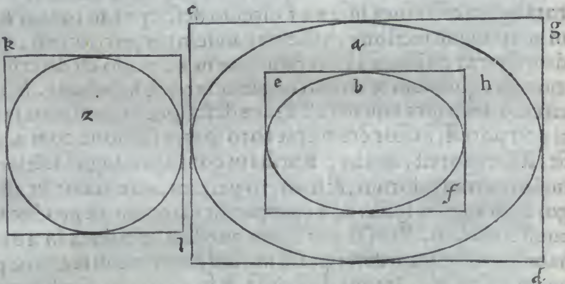

C

## PROPOSITIO VII.

SPatia acutianguli coni ſectione contenta eam inter ſe ſe proportionem habent, quam quæ fiunt ex coni acutianguli ſectionum diametris rectangula.

SINT ſpatia acutianguli coni ſectione contenta, in quibus a b: ſit autem & c d rectangulum ex diametris ſectionis coni acutianguli, quæ continet ſpatium a: & e f rectangulum ex diametris alterius ſectionis. Oſtendendum eſt, ſpatium a ad b eam habere proportionem, quam c d ad e f. Sumatur circulus quidam, in quo z. & diametri eius quadratũ ſit k l. Habet autem ſpatium a ad z circulum eã proportionẽ quã c d ad k l: & z circulus ad ſpatiũ

22.V. b eam, quam k l ad e f. Quare manifeſtum eſt, ſpatium a ad b eam habere proportionem, quam c d ad e f.



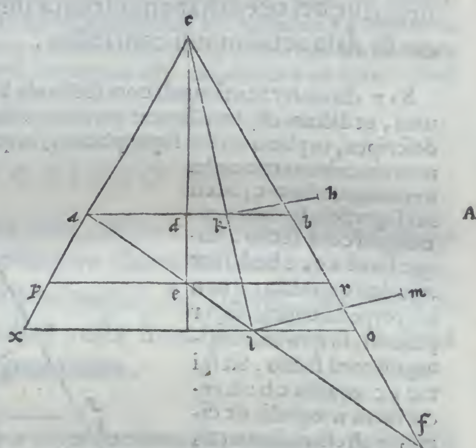

A Ex hoc apparet, ſpatia ſimilibus acutianguli coni ſectionibus contenta, eam inter ſe proportionem habere, quam ſectionum diametri, quæ eiuſdem ſint rationis, potentia inter ſe habent.

PRO-

## PROPOSITIO VIII.

Acutianguli coni ſectione data, & recta linea ab eius centro erecta ſuper planum, in quo eſt ipſa ſectio, fieri poteſt, ut conus inueniatur uerticem habens erectæ lineæ terminum, in cuius ſuperficie ſit data acutianguli coni ſectio.

Detur aliqua acutianguli coni ſectio: & à centro eius recta linea erigatur ſuper planum, in quo ſectio eſt: per lineam uero erectam, & per minorem diametrum planum educatur: ſitq; in ipſo minor diameter a b: centrum ſectionis acutianguli coni d: linea à centro erecta c d, cuius terminus c: & intelligatur acutianguli coni ſectio circa diametrum a b deſcripta, in plano erecto ſuper c d. Oportet iam conum inuenire uerticem habentem punctum c, in cuius ſuperficie ſit acutiãguli coni ſectio. Ducantur à puncto c ad a b puncta rectæ lineæ; & producantur: & ab a ducatur a f: ita ut rectangulum a e f ad quadratum e c eam habeat proportionem, quam quadratum dimidiæ maioris diametri habet ad d c quadratum: quod quidem fieri poteſt, quoniam proportio maior eſt ea, quam habet rectangulum a d b ad quadratum d c. Ab ipſa autem a f planum attollatur perpendiculariter ſuper planum, in quo ſunt lineæ c a, a f: & in hoc item plano circulus deſcribatur circa diametrum a f: à quo circulo conus ſit uerticem habens punctum c. Itaque in coni huius ſuperficie demonſtrabitur eſſe acutianguli coni ſectio. Si enim non ſit in ſuperficie coni, neceſſario ſequitur eſſe aliquod punctum in acutianguli coni ſectione, quod non ſit in ſuperficie coni. Intelligatur autem punctum h in ſectione acutianguli coni ſumptum, quod non ſit in ſuperficie coni: & ab h ducatur h k perpendicularis ad ipſam a b. erit ergo hæc erecta ſuper planum, in quo ſunt lineæ c a, a f. à puncto autem c ad k ducta linea producatur, quæ cum a f coeat in l: & ab l ducatur l m ad angulos rectos ipſi f a, in circulo circa a f deſcripto: intelligatur quoque punctum m ſublime in circumferentia ipſius: & ducatur per l quidem punctum, lineæ a b æquidiſtans ipſa x o: per punctum uero e ipſa p r. Quoniam igitur rectangulum a e f ad quadratum e c eam habet proportionem, quam quadratum dimidiæ maioris diametri ad d c quadratum: & quadratum e c ad rectangulum p e r eam habet, quam quadratum d c ad rectangulum a d b: habebit rectangulum a e f ad rectangulum p e r eandem proportionem, quam quadratum dimidiæ maioris diametri ad rectangulum a d b. eſt autem ut rectangulum a e f ad rectangulum p e r, ita rectangulum a l f ad ipſum x l o: & ut quadratũ dimidiæ maioris diametri ad rectangulum a d b, ita quadratum h k ad rectangulum a k b. Eandem igitur proportionem habet rectangulum a l f ad rectangulum x l o, quam quadratum h k ad rectangulum a k b. ſed rectangulum x l o ad quadratum c l habet eam, quam rectangu-




A
B
22.v.
C
D
E

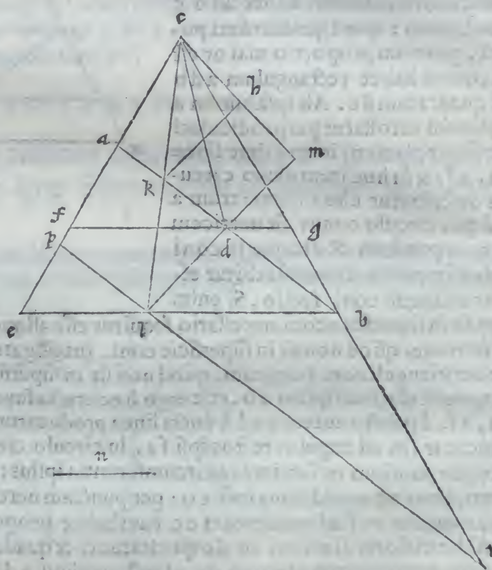
lum

22. v. gulum a k b ad quadratum c k. Quare a l f rectangulum ad quadratum c l eandem habet proportionem, quam h k quadratum ad quadratum k c. rectangulo autem a l f æquale eſt quadratum l m: quoniam in ſemicirculo circa a f perpendicularis ducta eſt l m. Quadratum ergo l m ad quadratum l c eandem proportionem habet, quam h k quadratum, ad quadratum k c: & idcirco in recta linea ſunt puncta c h m.
F ſed linea c m eſt in ſuperficie coni. conſtat igitur & h punctum in coni eſſe ſuperficie: poſitum autem fuerat non eſſe. nullum igitur punctum eſt in ſectione coni acutianguli, quod non ſit in dicti coni ſuperficie. Quare tota acutianguli coni ſectio eſt in ſuperficie eiuſdem coni.

## PROPOSITIO IX.

Acutianguli coni ſectione data, & linea ab eius centro eleuata, non perpendiculari in plano ex diametro altera erecto ſuper planum, in quo eſt ſectio coni acutianguli, fieri poteſt, ut conus inueniatur uerticem habens eleuatæ lineæ terminum, in cuius ſuperficie ſit data acutianguli coni ſectio.

Sit diameter acutianguli coni ſectionis b a; centrum d: & d c linea à centro eleuata, ut dictum eſt: Intelligatur autem acutianguli coni ſectio circa diametrum a b deſcripta, in plano erecto ſuper planum, in quo ſunt lineæ a b, c d. Oportet iam conum inuenire uerticem habentem punctum c; in cuius ſuperficie ſit data acutianguli coni ſectio. Itaque lineæ a c, c b nō ſunt æquales: quoniam c d non eſt perpendicularis ſuper planum, in quo eſt acutianguli coni ſectio. Sit igitur e c æqualis c b: & recta linea n æqualis ſit dimidiæ alterius diametri, quæ eſt coniuncta ipſi a b: & per d ducatur f g æquidiſtans lineæ e b: ab ipſa autem e b planum attollatur perpendiculariter ſuper planum, in quo ſunt lineæ a c, c b: & in hoc eodem plano circa diametrum e b deſcribatur circulus, uel ellipſis. Si enim
A quadratum n æquale eſt rectangulo f d g: deſcribatur circulus: ſin minus, acutianguli coni ſectio eiuſmodi, ut quadratū alterius diametri ad e b quadratum eam proportionem habeat, quam quadratum n ad rectangulum f d g. ſuma-
B tur conus uerticem habens c punctum; in cuius ſuperficie ſit circulus, uel acutianguli coni ſectio circa diametrum e b: id uero fieri poteſt, quoniam à puncto c ad me-



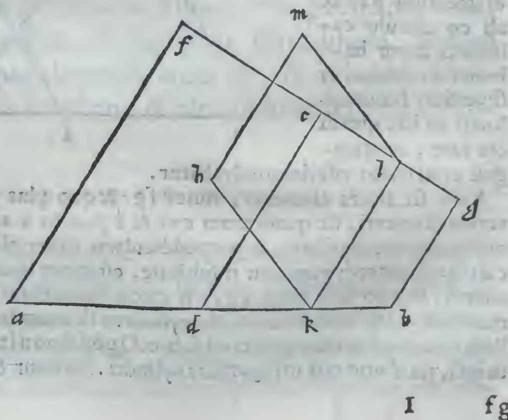

diam

diam e b ducta perpendicularis est super planum, quod est secundum ipsam e b. in hac ergo superficie est & acutianguli coni sectio circa diametrum a b. Si enim non est, sumetur aliquod punctũ in acutianguli coni sectione, quod non erit in superficie coni. Intelligatur punctum h sumptum, quod non sit in superficie coni: & ab h ducatur h k perpendicularis ad a b: ductaq; c k producatur, ut coeat cum e b in puncto l: & per l ducatur quædam linea l m in plano secundum e b erecto; quæ sit perpendicularis ad ipsam e b: punctum uero m intelligatur sublime in superficie coni: & per l item ducatur linea p r æquidistans a b. est igitur ut quadratum n ad rectan- C
gulum f d g, ita quadratum l m ad rectangulum e l b. ut autem rectangulum f d g D
ad rectangulum a d b, ita rectangulum e l b ad ipsum p l r. Quare erit ut quadratum 22. v.
n ad rectangulum a d b, ita quadratum l m ad rectangulum p l r. Sed ut quadratum E
n ad rectangulum a d b, ita quadratum h k ad rectangulum a k b: quoniam in eadem acutianguli coni sectione perpendiculares ductæ sunt ad diametrum a b. Eandem igitur proportionem habet quadratum l m ad rectangulum p l r, quam h k quadratum ad rectangulum a k b. habet autem & rectangulum p l r ad quadratum c l ean- F
dem proportionem, quam rectangulum a k b ad quadratum k c. ergo l m quadratum ad quadratum l c eandem habet, quam quadratum h k ad ipsum k c. quare in recta linea sunt puncta c h m. sed linea c m est in superficie coni. ergo & h punctum in coni superficie erit. positum autem fuerat non esse. manifestum est igitur, quod demonstrare oportebat.

## PROPOSITIO X.

Acutianguli coni sectione data, & linea ab eius centro eleuata non perpendiculari in plano ex altera diametro erecto super planum, in quo est sectio coni acutianguli, fieri potest, ut cylindrus inueniatur axem habens in eadem recta linea ipsi eleuatæ; in cuius superficie sit data acutianguli coni sectio.

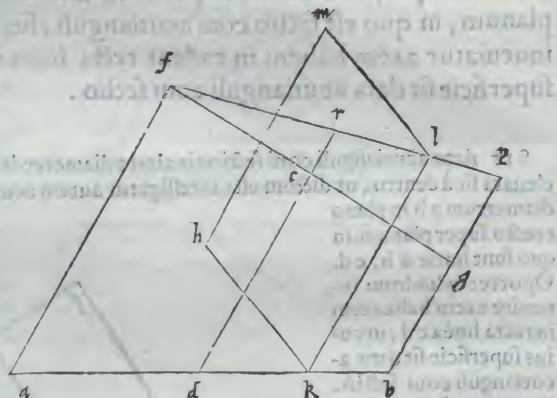
Sit datæ acutianguli coni sectionis altera diameter b a; centrum d: & linea c d eleuata sit à centro, ut dictum est: Intelligatur autem acutianguli coni sectio circa diametrum a b in plano erecto super planum, in quo sunt lineæ a b, c d. Oportet cylindrum inuenire axem habentem in recta linea c d; in cuius superficie sit data acutianguli coni sectio. Ducantur à punctis a b lineæ a f, b g æquidistantes ipsi c d: erit altera diameter sectionis coni acutianguli, uel æqualis ipsi interuallo inter a f, b g lineas interiecto, uel maior, uel minor. Sit primum æqualis lineæ f g: & sit



fg ad rectos angulos ipsi c d: à linea uero f g eleuetur planum perpendiculariter ad c d. in quo quidē plano circulus sit circa diametrum f g: & ab hoc circulo cylindrus axem habens ipsam c d. Itaque in superficie huius cylindri est acutianguli coni sectio. nisi enim ita sit, erit aliquod punctum in acutianguli coni sectione, quod nō erit in superficie cylindri: sitq; illud h: & ab h perpendicularis ducatur h k ad ipsam b a. erit igitur ea super planum erecta, in quo sunt lineæ a b, c d. à puncto autem k ducatur k l æquidistans lineæ c d: & ab l eleuetur l m ad rectos angulos ipsi f g, in circulo circa f g descripto. Intelligatur quoque m sublime in circumferentia se-
A micirculi circa diametrum f g. eandem ergo proportionem habet quadratum lineæ perpendicularis h k ad rectangulum a k b: & quadratum f c ad rectangulum a d
B b: quoniam æqualis est f g alteri diametro. habet autem & rectangulum f l g ad rectangulum a k b proportionem eam, quam f c quadratum ad quadratum a d elli-
C psis. quare rectangulum f l g æquale est quadrato h k. sed & ipsi quadrato l m est æ-
17. vi. quale. æquales igitur sunt perpendiculares h k, m l: & idcirco lineæ l k, m h æqui-
33. primi distantes. unde & ipsæ d e, m h æquidistantes erunt. ex quibus sequitur h m esse in
9. xi. superficie cylindri: quoniam à puncto m, quod est in superficie cylindri, ducta est m h axi æquidistans. manifestum ergo est & h punctum esse in superficie ipsius. positum autem fuerat non esse. Quare constat, quod oportebat demonstrare.

Perspicuum est igitur, cylindrum ellipsim comprehendentem rectum esse, si altera diameter æqualis sit interuallo linearum ductarum ab extremitatibus alterius diametri, ipsi lineæ ex centro eleuatæ æquidistantium.

Sit rursus altera diameter, maior ipsa f g: & æqualis sit p f alteri diametro: ab ipsa uero p f planum attollatur erectum super planum, in quo sunt lineæ a b; c d: & in hoc plano circulus sit circa diametrum p f: & ab eo circulo cylindrus axem habens d e. Itaque in superficie huius cylindri ex iis, quæ dicta sunt, acutianguli coni sectio esse demonstrabitur.




Sed sit altera diameter, minor f g: & quo plus potest f c, quàm dimidium alterius diametri, sit quadratum c x: & à puncto x attollatur linea x n æqualis dimidiæ alterius diametri, & perpendicularis super planum, in quo sunt lineæ a b,
D c d: intelligaturq; punctum n sublime. est igitur linea c n æqualis ipsi c f. in plano autem, in quo sunt lineæ f g, c n circa diametrum f g circulus describatur; qui transibit per n: & ab hoc circulo cylindrus sit axem habens c d. in superficie ergo cylindri huius est acutianguli coni sectio. Quòd si non ita sit, sumetur aliquod punctum in ipsa, quod non erit in superficie cylindri. sumatur: & sit h: ducaturq; h k perpēdicu-

laris

laris ad a b: & à puncto k æqui
distans ducatur ipsi c d, quæ sit
k l: & ab l attollatur l m per-
pendicularis ad f g, in semi-
circulo circa f g diametrum de
scripto. Intelligatur autem
punctum m in circumferen-
tia ipsius; à quo perpendicula
ris ducatur m o ad lineam k l
productam. erit hæc erecta su
per planum, in quo sunt a b, c
d: quoniam k l perpendicula-
ris est ad f g. ergo ut quadra-
tum m o ad quadratum m l, E
ita est quadratum x n ad qua-
dratum n c. ut autem quadra- F
tum m l ad rectangulum a k b,
ita c n quadratum ad ipsum a
d: nam quadratum quidem m
l æquale est rectangulo f l g: quadratum uero c n est æquale ipsi c f. Quare ut qua
dratum m o ad rectangulum a k b, ita quadratum n x ad quadratum a d. atque est 21. primi
k h quadratum ad rectangulum a k b, ut quadratum x n ad ipsum a d: quòd x n li- Con.Ap.
nea æqualis sit dimidiæ alterius diametri. perspicuum est igitur, perpendiculares m G
o, h k æquales esse: ideoq; æquales sunt k o, h m. Quoniam autem m h axi cylin-
dri æquidistat: & m punctum est in superficie ipsius: necesse est & m h in cylindri es
se superficie. quare & punctum h in eadem superficie erit. non erat autem. sequi-
tur ergo acutianguli coni sectionem necessario esse in superficie cylindri.

## PROPOSITIO XI.

OMnis coni ad conum proportionem compositam esse ex pro- A
portione basium, & proportione altitudinum, demonstratum
est ab iis, qui ante nos fuerunt. eadem autem est demonstratio, &
cur omnis portio coni ad coni portionem compositam proportio-
nem habeat ex proportione basium, & proportione altitudinum.
omnem præterea cylindri portionem triplam esse portionis coni, B
quæ basim habeat ipsi eandem, & æqualem altitudinem, eodem
modo demonstrabitur, quo demonstratum est, & cylindrum tri-
plum esse coni, qui basim eandem, & altitudinem habeat cylin-
dro æqualem.

## PROPOSITIO XII.

SI rectangulum conoides plano secetur per axem, uel axi æqui-
distanti: sectio erit rectanguli coni sectio, eadem illi, quæ fi-
guram describit; cuius diameter erit communis sectio planorum,
& eius, quod secat figuram, & eius, quod per axem ducitur ere-
ctum super planum secans. Si autem secetur plano super axem ere-

cto: ſectio circulus erit centrum habens in axe.

Si obtuſiangulum conoides plano ſecetur per axem, uel axi æquidiſtanti, uel per uerticem coni continentis conoides: ſectio erit obtuſianguli coni ſectio. ſiquidem per axem: eadem illi, quæ figuram deſcribit. ſi axi æquidiſtanti: erit prædictæ ſimilis. ſi autem & per uerticem coni continentis conoides: ſimilis non erit. ſectionis uero diameter erit communis ſectio planorum, ſecantis ſcilicet figuram, & eius quod per axem ducitur erectum ſuper planum ſecans. Quòd ſi ſecetur plano ſuper axem erecto: ſectio circulus erit centrum habens in axe.

Si ſphæroidum figurarum quælibet plano ſecetur per axem, uel axi æquidiſtanti: ſectio erit acutianguli coni ſectio. ſi quidem per axem: erit ea, quæ figuram deſcribit. ſi uero axi æquidiſtanti: erit illi ſimilis; cuius diameter erit communis ſectio planorum, ſecantis ſcilicet figuram, & eius, quod per axem ducitur, erectum ſuper planum ſecans. At uero ſi ſecetur plano ſuper axem erecto: ſectio circulus erit centrum habens in axe.

Si dictarum figurarum quælibet plano ſecetur per axem: lineæ ductæ à punctis, quæ ſunt in ſuperficie figuræ, non in ſectione ipſa, perpendiculares ad planum ſecans, intra figuræ ſectionem cadent.
A Horum autem omnium manifeſtæ ſunt demonſtrationes.

## PROPOSITIO XIII.

SI rectangulum conoides plano ſecetur, neque per axem, neque axi æquidiſtanti, neque ſuper axem erecto: ſectio erit acutianguli coni ſectio, cuius quidem maior diameter erit linea in conoide recepta à ſectione facta planorum; eius ſcilicet, quod figuram ſecat, & eius, quod per axem ducitur, erectum ſuper planum ſecans: minor uero diameter æqualis erit interuallo linearum, quæ ab extremitatibns maioris diametri ductæ fuerint axi æquidiſtantes.

SECETVR enim rectangulum conoides plano, uti dictum eſt: ſectoq; ipſo altero plano per axem, erecto ſuper planum ſecans, ſit conoidis ſectio a b c: plani ſecantis figuram ſit c a recta linea; axis uero conoidis, & diameter ſectionis b d. oſtendendum eſt, ſectionem conoidis, quæ fit à plano ſecundum a c eſſe acutianguli coni ſectionem; & maiorem eius diametrum lineam a c, minorem uero æqualem eſſe ipſi l a: cum ſit c l æquidiſtans lineæ b d, & a l perpendicularis ad c l. Intelligatur aliquod punctum in ſectione ſumptum *k*: & ab ipſo *k* ad c a perpendicularis ducatur *k* h. erit *k* h perpendicularis ad planum in quo eſt a c b rectanguli coni ſectio: quoniam & planum ſecans erectum eſt ſuper idem planum. per h autem ducatur e f ad rectos angulos ipſi b d: & per lineas e f, k h planum ducatur. erit igitur hoc erectum ſuper b d: & ſecabitur conoides plano ſuper axem erecto. quare ſectio circulus erit, cuius centrum d. ergo *k* h poterit æquale ei, quod fit ex e h,

h f: ſemicirculus enim eſt ſuper e f: & k h perpendicularis exiſtens, media ſit proportionalis. & poteſt æquale ei, quod ſit ex e h, h f. Ducatur item contingens coni ſectionem linea m n, æquidiſtans ipſi a c, quæ contingat in n puncto: & ducatur b t æquidiſtans ipſi e f. Itaque rectangulum a h c ad rectangulum e h f eandem habet proportionem, quam n t quadratum ad quadratum b t; id enim demonſtratum eſt. ipſi uero n t æqualis eſt linea t m: quoniam & b r ipſi b m. habet igitur & rectangulum a h c ad quadratum k h proportionem eandem, quam quadratum t m ad quadratum t b. quare & perpendicularis h k quadratum ad rectangulum a h c eandem habet proportionem, quam b t quadratum ad quadratum t m. Quoniam igitur ſimilia ſunt c a l, t m b triangula: quadratum perpendicularis h k ad rectangulum a h c eandem habet proportionem, quam quadratum a l ad quadratum a c. Similiter oſtendentur & quadrata aliarum perpendicularium, quæ à ſectione ad ipſam a c ducuntur, ad rectangula partibus a c contenta, eandem habere proportionem, quam quadratum a l ad quadratum a c. patet igitur ſectionem eſſe acutianguli coni ſectionem: & eius maiorem diametrum eſſe a c, minorem uero æqualem ipſi a l.

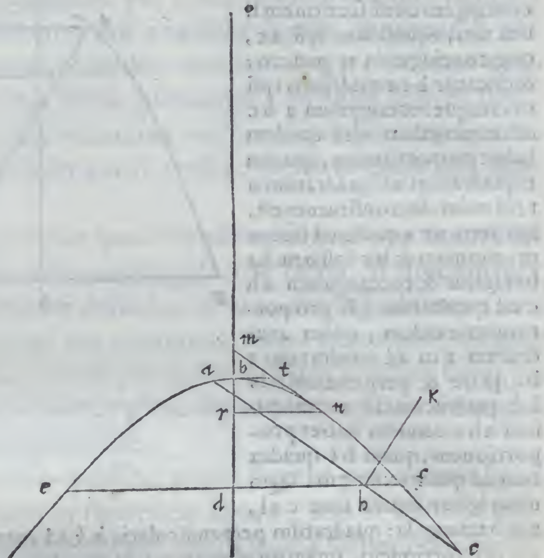
A B C D E F

## PROPOSITIO XIIII.

SI conoides obtuſiangulum ſecetur plano coeunti cum omnibus lateribus coni continentis conoides, non autem erecto ſuper axem: ſectio erit acutiangnli coni ſectio, cuius maior diameter erit linea in conoide recepta à facta ſectione planorum, eius ſcilicet, quod ſecat figuram, & eius, quod per axem ducitur erectum ſuper planum ſecans.

SECETVR enim obtuſiangulum conoides plano, uti dictum eſt: ſectoq; ipſo altero plano per axem, erecto ſuper planum ſecans, ſit conoidis quidem ſectio a b c, obtuſianguli coni ſectio: plani figuram ſecantis ſit a c recta linea: axis autem conoidis, & diameter ſectionis b d: intelligatur quoque in ſectione punctum aliquod k: & ab ipſo k ad a c perpendicularis ducatur k h. erit ipſa erecta ſuper planum, in quo eſt a b c coni ſectio. ducatur autem per h linea e f ad rectos angulos ipſi b d: & per e f, k h rectas lineas planum ducatur ſecans conoides. ſecabitur igitur plano erecto ſuper axem; & ſectio circulus erit, cuius centrum d. quare perpendi- A

pendicularis k h poterit æquale ei, quod lineis e h, h f continetur. Ducatur rurſus ipſa quidem m n æquidiſtans lineæ a c; quæ contingat coni ſectionem in puncto n: ipſa uero b t ducatur æquidiſtans e f. Itaque rectangulum e h f ad rectangulum a h c eandem habet proportionem, quã quadratum b t ad quadratum t n. quare perpendicularis k h quadratum ad rectangulum a h c eandem habet, quam b t quadratum ad quadratum t n. Similiter oſtendentur & quadrata aliarũ perpendicularium ab ipſa ſectione ad a c ductarum, ad rectangula ex partibus a c quas perpendiculares faciunt, eandem habere proportionem, quam b t quadratum ad quadratum t n. eſt autem linea b t minor ipſa t n: propterea, quòd & m t minor eſt ipſa t n; cum m b minor ſit b r: hoc enim in acutianguli coni ſectionibus contingit. perſpicuum eſt igitur, ſectionem eſſe acutianguli coni ſectionem; & maiorem eius diametrum eſſe a c. ſimiliter perpendiculari exiſtente n r in obtuſianguli coni ſectione, diameter ipſius maior erit c l.

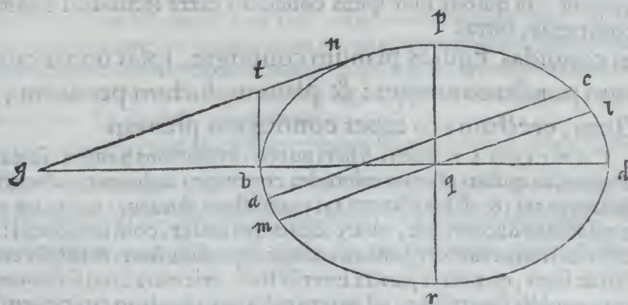



## PROPOSITIO XV.

SI oblongum ſphæroides plano ſecetur non erecto ſuper axem: ſectio erit acutianguli coni ſectio: diameter autem ipſius maior, erit linea in ſphæroide recepta à facta ſectione planorum, eius uidelicet, quod ſecat figuram, & eius, quod per axem ducitur erectum ſuper planum ſecans.

SI quidem igitur ſecetur plano per axem, aut axi æquidiſtanti: conſtat propoſitum. ſecetur autem alio plano: & ſecto ipſo per axem, plano erecto ſuper planum ſecans, ſit ſphæroidis ſectio a b c d acutianguli coni ſectio: ſecantis plani recta linea ſit a c: axis ſphæroidis, & diameter ſectionis coni acutianguli b d: centrum q: & minor diameter ſit p r. Ducatur autem linea b t ad rectos angulos lineæ b d: & g n æquidiſtans ipſi a c, contingensq; acutianguli coni ſectionem in puncto n: deinde ducatur m l per q æquidiſtans ipſi a c. ſimiliter iis, quæ ante tradita ſunt, oſtendentur quadrata perpendicularium ab ipſa ſectione ad a c ductarum ad rectangula, quæ fiunt ex partibus a c, eandem habere proportionem, quam quadratum b t ad quadratum t n. Itaque ſectionem eſſe coni acutianguli ſectionem, & diametrum ipſius

ipsius esse a c, constat. Sed maiorem esse diametrum, ostendemus. rectangulum enim p q r ad rectangulum m q l eam habet proportionem, quã b t quadratũ ad quadratũ t n: quoniam lineæ p r, m l contingentibus æquidistantes sunt. & rectangulum p q r minus est rectangulo m q l: quoniam & q p ipsa g l minor. minus est igitur b t quadratum quadrato t n. quare & quadrata perpendicularium à sectione ad a c ductarum minora sunt rectangulis, quæ fiunt ex partibus a c. perspicuum ergo est, ipsam a c minorem esse diametrum.




Si sphæroides latum plano secetur: alia quidem eadem erunt: ex diametris uero minor erit ea, quæ in sphæroide recipitur. B

Ex his apparet in omnibus figuris sectiones similes esse, si planis æquidistantibus secentur. quadrata enim perpendicularium ad rectangula partibus contenta eandem proportionem habebunt.

## PROPOSITIO XVI.

IN rectangulo conoide si à quouis puncto eorum, quæ in superficie sunt, ducantur lineæ axi æquidistantes; quæ quidem ad eas partes ducuntur, in quibus conoidis sunt conuexa, extra conoides cadunt; quæ uero ad partes contrarias, intra.

DVCTO nanque plano & per axem, & per punctum, à quo axi æquidistans ducta est, sectio erit rectanguli coni sectio; cuius diameter erit axis conoidis. At in rectanguli coni sectione à quouis puncto eorum, quæ in sectione sunt, ductis lineis diametro æquidistantibus, quæ quidem ad eas partes, in quibus sunt ipsius conuexa, ducuntur, extra sectionem cadunt, quæ uero ad partes alteras, intra. patet igitur, quod fuerat propositum. A

In obtusiangulo conoide à quolibet puncto eorum, quæ in superficie sunt, ductis lineis æquidistantibus cuidam lineæ, quæ in conoide ducta est per uerticem coni continentis conoides; quæ quidem ad eas partes ducuntur, in quibus sunt ipsius conuexa, extra conoides cadunt; quæ uero ad contrarias, intra.

DVCTO enim plano, & per lineam, quæ in conoide ducta est per uerticem coni continentis conoides, & per punctum, à quo æquidistans ducitur, sectio erit obtusianguli coni sectio: eius autem diameter erit linea, quæ à uertice coni in conoide ducta est. Sed in sectione coni obtusianguli, si à quouis puncto in sectione sumpto ducantur B C

ducantur lineæ æquidiſtantes cuidam lineæ ductæ, ut dictum eſt: quæ ad eas partes uergunt, in quibus ſunt ipſius conuexa, extra ſectionem cadunt; quæ uero ad contrarias, intra.

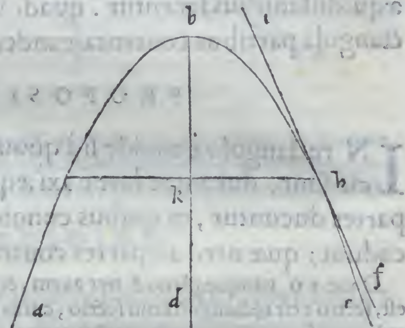
Si conoidas figuras planum contingat, ipſas non ſecans: in uno tantum puncto continget: & planum ductum per axem, & per contactum, erectum erit ſuper contingens planum.

CONTINGAT enim, ſi fieri poteſt, in pluribus punctis: ſumantur autem puncta duo, in quibus planum conoides contingit: & ducantur ab utriſque lineæ æquidiſtantes axi: & ab his planum axi æquidiſtans ducatur: uel enim per axem, uel axi

D æquidiſtans ductum erit. quare ſectionem faciet, coni ſectionem: & puncta in ipſa coni ſectione erunt. Quoniam enim in ſuperficie ſunt: & in ipſo erunt plano. recta igitur linea, quæ inter puncta interiicitur, erit intra coni ſectionem. & idcirco intra conoidis ſuperficiem. eſt autem recta linea in plano contingente: quoniam & pũcta in eo ſunt. ergo contingentis plani aliqua pars erit intra conoides: quod fieri nõ poteſt; poſitum enim fuerat non ſecare. In uno igitur tantum puncto continget. Ipſum autem planum per contactum, & per axem ductum, erectum eſſe ſuper planũ contingens; ſiquidem in uertice contingat conoides, manifeſtum eſt. ductis enim per conoidis axem duobus planis, ſectiones erunt conorum ſectiones, diametrum habentes ipſum axem: contingentis uero plani lineæ, quæ ſectiones conorum contingunt in diametri extremitate, angulos rectos faciunt cum diametro. quare in contingenti plano erunt duæ rectæ lineæ ad rectos angulos ipſi axi: & ob id planum ſuper axem erectum erit. ergo & ſuper planum per axem ductum. Quòd ſi planum non contingat conoides in uertice: per contactum, & axem planum ducatur: ſitq; ſectio conoidis a b c coni ſectio: & axis, & diameter ſectionis b d: contingentis autem plani ſectio ſit recta linea e h f, quæ coni ſectionem contingat in h: & ab h perpendicularis ducatur h k ad ipſam b d: & planum attollatur ſuper axem erectum. faciet hoc ſectionem circulum, cuius centrum k: ſectio autem huius plani, & plani contingentis erit linea contingens circulum. quare faciet angulos rectos

18. III. cum h k: & propterea erecta erit ſuper planum, in quo ſunt lineæ k h, b d. perſpicuum ergo eſt & planum cõ

18. XI. tingens erectum eſſe ſuper idem planum. quoniam & rectæ lineæ, quæ in ipſo ſunt.




## PROPOSITIO XVII.

SI ſphæroidum figurarum quamlibet planum contingat, non ſecans figuram: in uno tantum puncto continget; & planum, quod per contactum, & axem ducitur, erectum erit ſuper contingens planum.

CONTINGAT enim in pluribus punctis: & ſumantur puncta duo, in quibus planum ſphæroides contingit: ab utroque autem ipſorum ducantur rectæ lineæ axi æquidiſtantes; & ducto per illas plano, ſectio erit acutianguli coni ſectio; & puncta

cta in ipſa coni ſectione. Quæ igitur inter puncta interiicitur recta linea, intra coni ſectionem cadet. quare & intra ſphæroides ſuperficiem. eſt autem recta linea in contingente plano: quoniam & puncta in eo ſunt. ergo contingentis plani aliqua pars erit intra ſphæroides: quod quidem fieri non poteſt: poſitum enim fuerat non ſecare. perſpicuum eſt igitur in uno tantum puncto contingere. Ipſum uero planum per contactum, & per axem ductum, erectum eſſe ſuper planum contingens, ſimiliter atque in conoidibus figuris demonſtrabimus.

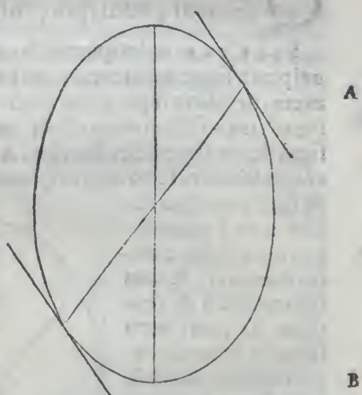
Si ſphæroidum figurarum quælibet plano ſecetur per axem: ſectionemq́; factam contingat quædam recta linea: & per contingentem planum ducatur erectum ſuper planum ſecans: continget id figuram in eodemmet puncto, in quo & recta linea coni ſectionem contingit.

Non enim in alio puncto continget ipſius ſuperficiem; alioquin ab eo puncto A
ducta perpendicularis ſuper planum ſecans cadet extra coni ſectionem: nam ſuper contingentem cadet, cum plana ad inuicem ſint erecta: quod quidem fieri non poteſt, oſtenſum eſt enim intra cadere. B

## PROPOSITIO XVIII.

Si ſphæroidum figurarum aliquam duo plana æquidiſtantia contingant: quæ contactus iungit recta linea per centrum ſphæroidis tranſibit.

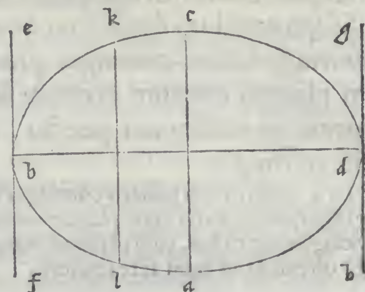
Si igitur plana fuerint ad rectos angulos ipſi axi: manifeſtum eſt, quod proponitur. Sin minus, planum ductum per axem, & alterum contactum, erectum erit ſuper contingens planum. quare & ſuper planum ei æquidiſtans. neceſſe eſt igitur idem eſſe planum ductum per axem, & per utrunque contactum; alioquin erunt duo plana A
erecta ſuper idem planum, per eandem lineam ducta, quæ non ſit erecta ſuper planum: poſitum enim eſt, axem non eſſe erectum ſuper plana æquidiſtantia. In eodem igitur plano erunt & axis, & contactus ipſi: & ſectum erit ſphæroides per axẽ. quare ſectio erit acutianguli coni ſectio: planorum autem contingentium ſectiones æquidiſtantes erunt, quæ contingent acutianguli coni ſectionem in contactibus planorum. At ſi duæ rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes acutianguli coni ſectionem contingant: & centrum ſectionis coni acutianguli, & contactus ipſi in eadem recta linea erunt. B



## PROPOSITIO XIX.

Si ſphæroidum figurarum quamlibet duo plana æquidiſtantia contingant: ducatur autem per centrum ſphæroidis aliquod planum contingentibus planis æquidiſtans: rectæ lineæ, quæ per factam ſectionem ducuntur, æquidiſtantes lineæ contactus iungenti, extra ſphæroides cadent.

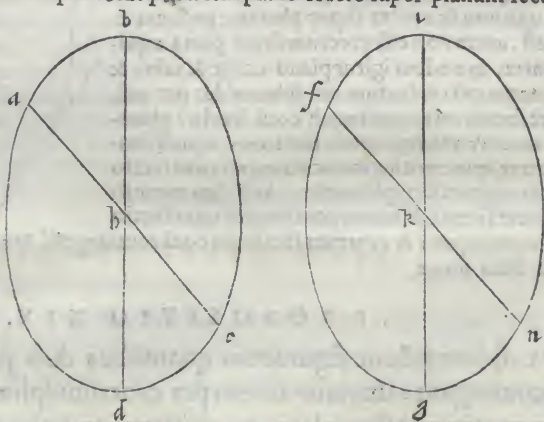
Ponantur enim, quæ dicta sunt: & sumatur aliquod punctum in facta sectione: & per ipsum, & rectam lineam contactus iungentem planum ducatur. seca
A bit hoc sphæroides, & plana æquidistantia. Sit enim sectio sphæroidis a b c d acutianguli coni sectio: planorum contingentium sectiones sint e f, g h: sumptum pun
B ctum a: & recta linea b d iungens contactus. transibit igitur ea per centrum. plani uero contingentibus planis æquidistantis sectio sit c a, quæ & ipsa per centrum ducta erit, quoniam & planum. Itaque quoniam a b c d; uel circulus est, uel acutianguli coni sectio: & ipsam contingunt duæ rectæ lineæ e f, g h: per centrum autem du
C cta est a c ipsis æquidistans: constat lineas ductas à punctis a c æquidistantes ipsi b d contingere sectionem; & extra sphæroides
D cadere. Quòd si planum æquidistans contingentibus planis non ducatur per centrum, ut k l: perspicuum est, ductis à sectione lineis, quæ quidem ad eas partes uergunt, in quibus est minor portio, extra sphæroides cadere; quæ uero ad partes contrarias, intra.




## PROPOSITIO XX.

Qvælibet figura sphæroidis plano per centrum ducto, bifariam secatur, tum ipsa, tum ipsius superficies.

Secetvr enim sphæroides plano per centrum ducto. Itaque uel per axem, uel plano super axem erecto, uel non erecto secabitur. Si quidem igitur secetur per
A axem, uel plano super axem erecto: constat & ipsum, & ipsius superficiem bifariam secari. manifestum enim est alteram eius partem alteri congruere, & alterius partis superficiem superficiei alterius. At si neque per axem ducto plano, neque super axem erecto secetur: secto autem sphæroide per axem plano erecto super planum secans, sit figuræ quidem sectio a b c d acutianguli coni sectio; cuius diameter, & axis sphæroidis b d, centrum h: plani uero secantis sphæroides per centrum sectio sit recta linea a c: sumatur præterea alterum sphæroides huic æquale, & simile: sectoq; ipso per axem, sit sectio e f g n acutianguli coni sectio; cuius diameter, & axis sphæroidis e g, & centrum k: ducatur per k linea f n angulum ad k faciens æqualem angulo ad h: & ab ipsa f n planum attollatur erectum super planum, in quo est sectio e f g n. erunt acutiangulorum conorum sectiones ipsæ a b c d, e f g n æquales, & similes inter sese. quare

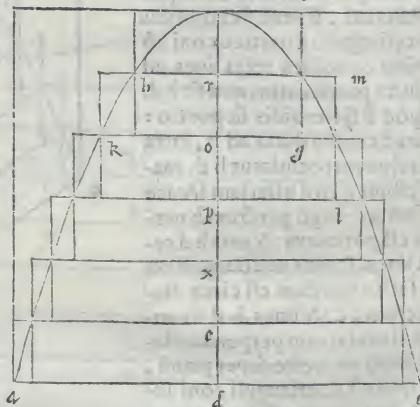


quare congruit altera alteri, posita e g super b d & f n super a c. Sed & planum secundum n f congruit plano secundum a c: quoniam ab eadem recta linea super idem planũ eorum utrunque constituitur. congruit ergo & portio abscissa à sphæroide plano secundũ n f, quæ est in parte, in qua e, portioni abscissæ ab altero sphæroide plano secundum a c in parte, in qua b: & reliqua portio reliquæ, & superficies item portionum superficiebus congruunt. Rursus posita e g super b d: ita ut e sit super d; & g super b: linea uero, quæ interiicitur inter puncta n f, posita super lineam inter a c interiectam, perspicuum est, acutiangulorum conorum sectiones congruere inter sese: & f cadere super c: & n super a. similiter & planum secundum n f plano secundum a c congruit: & portionum abscissarum plano secundum n f, ea quidẽ, quæ est ad partes g congruit portioni altero plano secundum a c abscissæ ad partes b; ea uero, quæ est ad partes e congruit portioni, quæ est ad d. Quoniam igitur eadem portio utrique portionum congruit: sequitur portiones æquales esse: & idcirco earum quoque superficies æquales.

## PROPOSITIO XXI.

DAta cuiuslibet conoidis portione abscissa plano super axem erecto, uel data portione cuiuslibet sphærioidis, quæ maior non sit dimidio sphæroide similiter abscissa, fieri potest, ut portio solida inscribatur, et altera circumscribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus constans: ita ut circumscripta figura excedat inscriptam magnitudine, quæ minor sit quacunque solida magnitudine proposita.

DETVR enim portio, qualis est a b c: & secta ipsa plano per axem, sit sectio portionis a b c coni sectio: planiautem secantis portionem sit a c recta linea: & portionis axis, & diameter sectionis b d. Quoniam igitur positum est, planum secans erectum esse super axem: sectio circulus erit, cuius diameter a c. ab hoc autem circulo cylindrus sit axem habens b d. cadet eius superficies extra portionem, quia uel conoides est, uel sphæroides non maius dimidio sphæroide. Itaque hoc cylindro cõtinenter secto bifariam plano super axem erecto, erit tandem residuum minus proposita solida magnitudine. sit residuum ab ipso, cylindrus basim habens circulum circa diametrum a c, axem uero e d, minor proposita magnitudine: diuidaturq; b d in partes æquales ipsi e d, in punctis r o p x: & à diuisionibus ducantur rectæ lineæ æquidistantes ipsi a c ad coni usque sectionem: & ab his plana attollantur erecta super b d. erunt igitur sectiones circuli centra habentes in linea b d. ab unoquoque autem circulorum duo cylindri describantur, quorum uterque axem habeat ipsi e d æqualem; unus quidem ad eas cylindri partes, in quibus est d; alter uero ad eas, in quibus b. erit iam in portione figura quædam solida inscripta, ex cylindris constans ad eas partes descriptis, in quibus d: & altera circum-




A

B

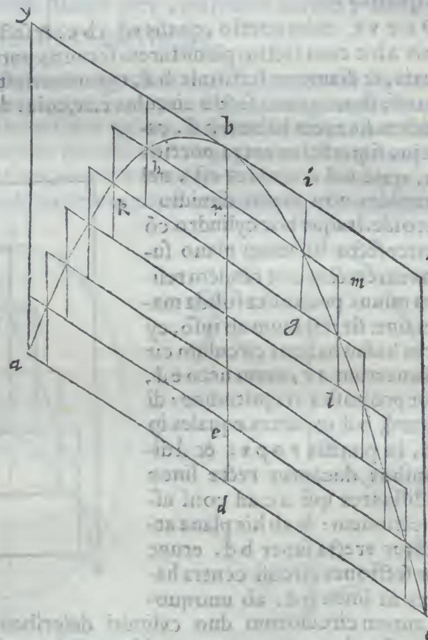
C

ſcripta ex cylindris ad partes b. Reliquum eſt, ut oſtendamus circumſcriptam excedere inſcriptam magnitudine, quæ minor ſit ſolida magnitudine propoſita: unuſquiſque enim cylindrorum, qui ſunt in figura inſcripta æqualis eſt cylindro, qui ab eodẽ circulo deſcribitur ad partes b, ut cylindrus h g ipſi h i: & k l ipſi k m: & alii ſimiliter: & omnes cylindri omnibus æquales ſunt. conſtat ergo circumſcriptam figuram excedere inſcriptam cylindro, qui baſim habet circulum circa diametrum a c, & axem e d. hic autem eſt minor propoſita ſolida magnitudine.

## PROPOSITIO XXII.

DAta cuiuslibet conoidis portione, abſciſſa plano non erecto ſuper axem; uel data portione cuiuslibet ſphæroidis ſimiliter abſciſſa, quæ dimidio ſphæroide maior non ſit; fieri poteſt, ut portio ſolida inſcribatur, & altera circumſcribatur ex cylindri portionibus æqualem altitudinem habentibus conſtans: ita ut circumſcripta figura excedat inſcriptam magnitudine, quæ minor ſit quacunque ſolida magnitudine propoſita.

DETVR portio qualis dicta eſt: ſecta autem figura alio plano per axem, erecto ſuper planum, quod datam portionem abſcidit, figuræ quidem ſectio ſit a b c coni ſe-
A ctio: plani uero portionem abſcindentis recta linea c a. Et quoniam poſitum eſt planum abſcindens portionem non eſſe erectum ſuper axem, ſectio erit acutianguli coni ſectio, cuius diameter a c. Sit autem u y contingens coni ſectionem in b puncto: & ab ipſa u y attollatur planum æquidiſtans plano ſecundum a c. cõ
B
C tinget hoc figurã in b. et ſi quidem portio ſit rectãguli conoidis: ab ipſo b ducatur b d æquidiſtans axi. ſi uero ſit conoidis
D obtuſianguli: à uertice coni cõtinẽtis conoides recta linea ad b ducta producatur, quæ ſit b d.
E Quòd ſi ſphæroidis ſit portio: linea à centro ducta ad b, intra portionem recipiatur b d. manifeſtum eſt b d bifariam ſecare ipſam a c: ergo punctum b uertex eſt portionis: & axis b d recta linea. Itaque acutianguli coni ſectio quædam eſt circa diametrum a c: & linea b d à centro eleuata, non perpendicularis in plano erecto ſuper planũ, in quo eſt acutianguli coni ſectio, per alteram ſcilicet diametrum conſtituto plano: fieri igi
F tur poteſt, ut cylindrus inueniatur axem habens b d, in cuius ſuperficie ſit acutianguli coni ſectio circa diametrum a c. cadet autem ſuperficies ipſius extra portionem: quoniam uel eſt conoidis, uel ſphæroidis portio, & non maior



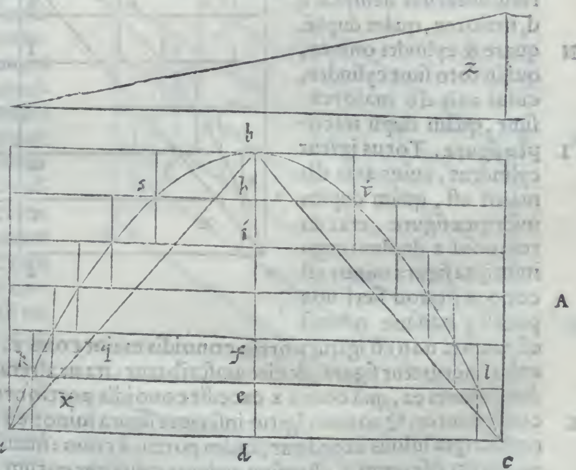
ior dimidio ſphæroide: atque erit portio quædam cylindri baſim habẽs acutianguli coni ſectionẽ circa diametrũ a c, & axem b d. ea uero portione bifariam ſecta planis æquidiſtantibus plano ſecundũ a c, erit quod relinquitur minus propoſita ſolida magnitudine. Sit portio baſim habens acutianguli coni ſectionẽ circa diametrũ a c, & axẽ e d, quæ minor ſit propoſita ſolida magnitudine: diuidaturq; d b in partes æquales ipſi e d: & à diuiſionibus ducãtur lineæ ipſi a c æquidiſtantes uſque ad coni ſectionẽ; G à quibus plana attollantur æquidiſtantia plano ſecundũ a c ducto. ſecabunt hæc portionis ſuperficiem: & erunt acutiangulorũ conorũ ſectiones ſimiles ei, quæ eſt circa H diametrum a c: quoniam plana æquidiſtãtia ſunt. In unaquaque uero acutianguli coni ſectione deſcribantur cylindri portiones duæ; una quidem ad partes, in quibus eſt d; altera uero ad partes b, quæ axem habeant ipſi d e æqualem. erunt igitur quædam figuræ ſolidæ; altera quidem inſcripta in portione; altera uero circumſcripta ex cylindri portionibus æqualem altitudinem habentibus conſtantes. Reliquum eſt, ut oſtendamus circumſcriptam figuram excedere inſcriptam magnitudine, quæ minor ſit ſolida magnitudine propoſita. oſtendetur autem ſimiliter antecedenti, circumſcriptam figuram excedere inſcriptam portione, quæ baſim habet acutianguli coni ſectionem circa diametrum a c, & axem e d: hæc uero minor eſt propoſita ſolida magnitudine.

Itaque his præmiſsis demonſtrabimus ea, quæ de figuris propoſita ſunt.

## PROPOSITIO XXIII.

Qvælibet portio rectanguli conoidis abſciſſa plano ſuper axem erecto, ſeſquialtera eſt coni baſim habentis eandem portioni, & eundem axem.

Sit enim portio rectanguli conoidis abſciſſa plano erecto ſuper axem. & ſecta ipſa altero plano per axem, ſit ſuperficiei quidem ſectio a b c rectanguli coni ſectio: plani uero abſcindentis portionem ſit recta linea c a: & axis portionis b d: ſit item conus eandem baſim habens portioni, & axem eundem, cuius uertex b. Oſtendendum eſt conoidis portionem ſeſquialteram eſſe huius coni. ponatur enim conus z ſeſquialter coni, cuius baſis eſt circulus circa diametrum a c, & axis b d. Sit autem & cylindrus baſim habens circulum circa diametrum a c, & axem b d. erit igitur conus z dimidium totius cylindri: quoniam eiuſdem coni eſt ſeſquialter. Dico portionem conoidis æqualem eſſe z cono. Si enim non eſt æqualis, uel maior erit, uel minor. Sit primum maior, ſi fieri poteſt. & inſcribatur figura ſolida in portione: & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus conſtans: ita ut circumſcripta figura excedat A



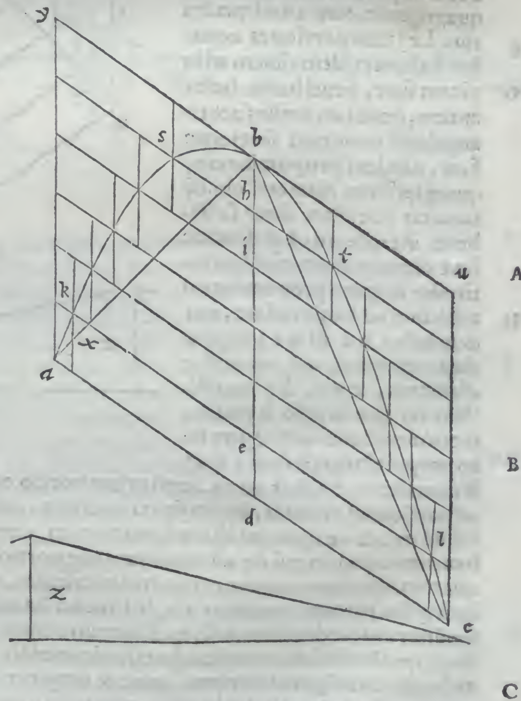

inſcriptam

inſcriptam magnitudine minori ea, qua portio conoidis excedit conum z: & cylin
drorum, quibus conſtat figura circumſcripta maximus quidem ſit, qui baſim habet
circulum circa diametrum a c, & axem e d; minimus uero, qui baſim habet circu-
lum circa diametrum s t, & axem b h: cylindrorum autem, quibus figura inſcri-
pta conſtat, maximus ſit baſim habens circulum circa diametrum k l, & axem d e;
& minimus, qui baſim habet circulum circa diametrum s t, & axem h i. Itaque pro
ducantur plana cylindrorum omnium ad ſuperficiem cylindri baſim habentis circu-
lum circa diametrum a c, & axem b d. erit totus cylindrus diuiſus in cylindros nu-
mero quidem æquales iis, qui ſunt in circumſcripta figura, magnitudine uero maxi
B mo ipſorum æquales. Et quoniam circumſcripta figura minus excedit inſcriptam,
C quàm portio conum: perſpicuum eſt figuram inſcriptam cono z maiorem eſſe. pri-
mus autem cylindrus eorum, qui in toto ſunt cylindro, axem habens d e ad primũ
cylindrum eorum, qui ſunt in figura inſcripta, cuius axis d e, eandem habet pro-
D portionem, quam d a ad k e poteſtate. hæc autem eadem eſt ei, quam b d ha-
E bet ad b e, & ei, quam d a ad e x. ſimiliter oſtendetur & ſecundus cylindrus eorum,
F qui ſunt in toto cylindro axem habens e f ad ſecundum cylindrum eorum, qui in fi-
gura inſcripta, eandem habere proportionem, quam p e, hoc eſt d a ad q f. & alio
rum cylindrorum unuſquiſque, qui in toto ſunt cylindro ad cylindrum in figura in-
ſcripta, cuius idem ſit axis, eam proportionem habebit, quam dimidia diametri ba
G ſis habet ad eam ipſius partem, quæ inter a b, b d rectas lineas interiicitur. & om-
nes cylindri, qui in eo cylindro continentur, cuius baſis eſt circulus circa diame-
trum a c, & axis d b ad omnes cylindros in figura inſcripta contentos eandem ha-
bebunt proportionem,
quam omnes ſemidiame
tri circulorum, qui ſunt
in baſibus dictorum cy-
lindrorum ad omnes re-
ctas lineas inter a b & b d
interiectas. Dictæ uero
ſemidiametri ſunt dicta-
rum linearum dempta a
d, maiores, quàm duplæ.
H quare & cylindri omnes,
qui in toto ſunt cylindro,
cuius axis d b maiores
ſunt, quàm dupli inſcri-
I ptæ figuræ. Totus igitur
cylindrus, cuius axis d b
maior eſt, quàm duplus
inſcriptæ figuræ. erat au
tem coni z duplus. ergo
inſcripta figura minor eſt
A cono z: quod fieri non
poteſt; nanque oſtenſa
eſt maior. non eſt igitur portio conoidis maior cono z. ſed neque minor. Rurſus
enim inſcribatur figura, & circumſcribatur: ita ut altera alteram excedat magnitu-
dine minori ea, qua conus z excedit conoidis portionem: & alia eadem prioribus
K conſtruantur. Quoniam igitur inſcripta figura minor eſt portione: & inſcripta à cir
cumſcripta minus exceditur, quàm portio à cono: manifeſtum eſt circumſcriptam
minorem eſſe cono z. Rurſum primus cylindrus eorum, qui ſunt in toto cylindro,
axem habens d e ad primum cylindrum, qui eſt in figura circumſcripta, cuius idem
axis d e, eam habet proportionem, quam quadratum a d ad ſemetipſum. ſecundus
autem cylindrus eorum, qui ſunt in toto cylindro axem habens e f ad ſecundum cy
lindrum in figura circumſcripta, axem habentem eandem e f, eam habet proportio
nem

nem, quam d a ad k e poteſtate. hæc autem eadem eſt ei, quam habet b d ad b c; & quam d a ad e x. & aliorum cylindrorum unuſquiſque, qui in toto ſunt cylindro axem habentium æqualem ipſi d e ad unumquemque cylindrum eorum, qui ſunt in figura circumſcripta, quorum idem axis eſt, eam habebunt proportionem, quam dimidia baſis, ad eam ipſius partem, quæ inter a b, b d rectas lineas interiicitur. er- L
go & omnes cylindri, qui in toto cylindro ſunt, cuius axis d b ad omnes cylindros in figura circumſcripta contentos eandem habebunt proportionem, quam omnes rectæ lineæ ad omnes rectas lineas. omnes autem rectæ lineæ ex centris circulorum, qui ſunt cylindrorum baſes, linearum omnium, quæ ab ipſis abſcinduntur unà cum a d, minores ſunt, quàm duplæ. conſtat igitur & cylindros omnes, qui ſunt in toto cylindro, minores eſſe, quàm duplos cylindrorum, qui in circumſcripta figura continentur. Quare cylindrus baſim habens circulum circa diametrum a c, & axim b d minor eſt, quàm duplus circumſcriptæ figuræ. non eſt autem minor, ſed maior, quàm duplus: eſt enim duplus coni z: & figura circumſcripta minor oſtenſa eſt cono z. non eſt igitur conoidis portio cono z minor. ſed neque maior, ut oſtenſum eſt. ſequitur ergo, ut ſeſquialtera ſit coni, qui baſim habet eandem portioni, & axem eundem.

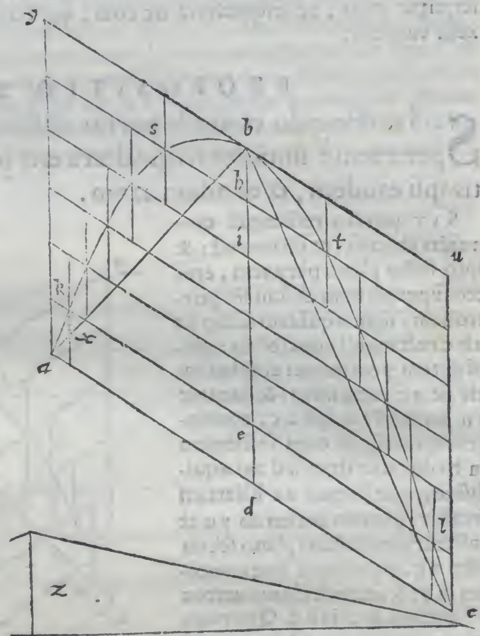
## PROPOSITIO XXIIII.

SI à rectangulo conoide portio abſcindatur plano non erecto ſuper axem: ſimiliter ſeſquialtera erit portionis coni, baſim habentis ipſi eandem, & eundem axem.




SIT portio rectanguli conoidis abſciſſa, ut dictum eſt: & ipſo ſecto plano per axem, erecto ſuper planum abſcindẽs portionem, figuræ quidem ſectio ſit a b c rectanguli coni ſectio: plani autem portionem abſcindentis ſit a c recta linea: & ducatur y u æquidiſtans ipſi a c, contingensq; rectãguli coni ſectionem in b: ducatur item b d axi æquidiſtans, quæ lineam a c bifariam ſecabit: planum autem ab y u attollatur æquidiſtans plano ſecundum a c. continget hoc conoides in b: & erit portionis uertex b punctum, & axis b d. Quoniam igitur planum ſecundum a c non erectum ſuper axem ſecuit conoides: ſectio eſt acutianguli coni ſectio, cuius maior diameter a c. Et cum acutianguli coni ſectio ſit circa diametrum a c: & recta linea b d à centro ſectionis coni acutianguli eleuata, nõ perpendicularis in plano ex diametro erecto ſuper planum, in quo acutianguli coni ſectio exiſtit: fieri poteſt, ut cylindrus inueniatur axem habens in recta linea b A B C

d; in cuius ſuperficie ſit acutianguli coni ſectio. fieri itidem poteſt, ut & conus inueniatur uerticem habens b punctum, in cuius ſuperficie ſit ipſa acutianguli coni ſectio. eritq; portio cylindri quædam baſim habens ſectionem coni acutianguli circa diametrum a c, axem autem b d: & coni item portio baſim habens eandem ipſis, & eundem axem. Oſtendendum eſt conoidis portionem ſeſquialteram eſſe portionis huius coni. Sit enim z conus ſeſquialter dictæ portionis. erit iam cylindri portio baſim habens eandem portioni conoidis, & axem eundem, dupla coni z. nanque hic ſeſquialter eſt portionis coni, quæ baſim habet eandem portioni conoidis, & eũ
11. huius dem axem: portio autem coni dicta tertia pars eſt portionis cylindri baſim habentis eandem portioni, & axem eundem. Itaque neceſſarium eſt, conoidis portionem æqualem eſſe cono z. Si enim non eſt æqualis, uel maior eſt, uel minor. Sit primum ſi fieri poteſt, maior: inſcribaturq; portioni quædam ſolida figura, & altera circumſcribatur ex cylindri portionibus æqualem altitudinem habentibus; ita ut circumſcripta figura inſcriptam excecedat minori exceſſu, quã quo portio conoidis excedit conũ
E z. & plana portionum pertingent ad ſuperficiem portionis, baſim habentis eandem portioni conoidis, & axem eundem. Rurſus prima portio earũ, quæ ſunt in tota portione axem habens d e ad portionem primam in figura inſcripta, cuius axis d e eãdem proportionem habet, quam quadratum a d ad quadratum k e. nam portiones æqua
F lem habentes altitudinem ad in
G uicem ſunt, ſicuti baſes: baſes autem, quoniam ſimiles acutiangulorũ conorum ſectiones ſunt, eandem proportiouem, quam ipſarum diametri eiuſdẽ rationis poteſtate inter ſe habent. At ipſæ a d, k e dimidiæ
A ſunt diametrorum eiuſdem rationis: & quam proportionem
H a d habet ad k e poteſtate, eandem habet b d ad b e longitudine: quoniam b d æquidiſtat diametro, & a d, k e æquidiſtant ei, quæ in ipſo b puncto ſectionem contingit. Quam uero proportionem habet b d ad b e eandem a d habet ad e x. ergo prima portio earum, quæ ſunt in tota portione, ad portionem primam, quæ in figura inſcripta, eandem proportionem habebit, quã a d ad e x. & unaquæque aliarum portionum, quæ ſunt in tota portione, axem habentium æqualem ipſi d e ad unamquanque portionnm, quæ ſunt in figura inſcripta, quarum idem axis, eandem proportionem habet, quam dimidia diametri baſium ad eam ipſius partem, quæ inter a b, b d rectas lineas interiicitur. Oſtendetur autem ſimiliter antecedentibus, inſcriptã figuram cono z maiorem eſſe: & cylindri portionem, quæ baſim habet eandem portioni conoidis, & axem eundem, maiorem eſſe, quàm duplam figuræ inſcriptæ. quare & maior erit, quàm dupla coni z: quod fieri non poteſt: erat enim dupla ipſius. non ergo conoidis portio maior eſt cono z. Eadem

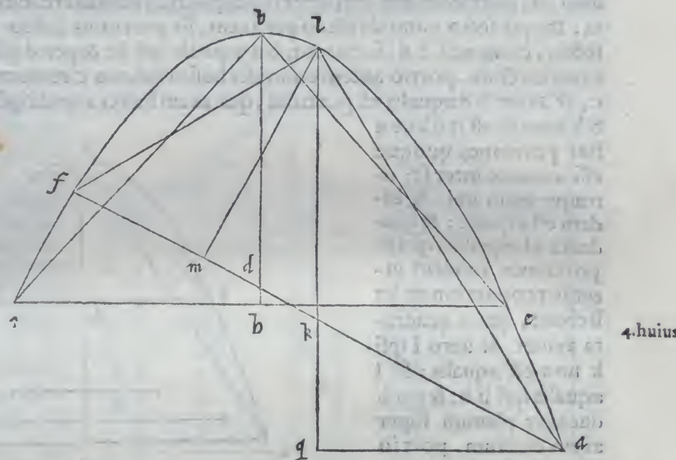


dem ratione neque minor oftendetur. ex quibus æqualem effe conftat. conoidis igitur portio fefquialtera eft portionis coni bafim habẽtis eadem ipfi, & axem eundẽ.

## PROPOSITIO XXV.

SI rectanguli conoidis duæ portiones abfcindantur; altera quidem plano fuper axem erecto, altera autem non erecto: et fint portionum axes æquales: ipfæ quoque portiones æquales erunt.

ABSCINDANTVR enim rectanguli conoidis duæ portiones, ut dictum eft; fectoq; conoide plano per axem, et altero plano fuper axem erecto, fit conoidis fectio a b c rectanguli coni fectio, cuius diameter, b d: fectiones autem planorum fint a f, e c rectæ lineæ; plani quidem fuper axem erecti ipfa e c; non erecti uero a f: axes portionum fint b h, k l, æquales inter fefe: et uertices puncta b l. Oftendendum eft, portionem conoidis, cuius uertex b portioni eiufdem, cuius uertex l æqualem effe. Quoniã enim ab eadem rectanguli coni fectione duæ portiones abfcinduntur, uidelicet a l f, e b c: et funt ipfarum diametri k l, h b æquales: triangulum a l k æquale erit triangulo e h b: oftenfum enim eft a l f triangulum triangulo e b c æquale effe. ducatur a q perpendicularis ad ipfam k l productam. et quoniam funt æquales b h, k l: et ipfæ e h, a q æquales erunt. Itaque in portione, cuius uertex b, defcriptus fit conus, bafim habens eandem portioni, & axem eundem: in portione autem, cuius uertex l fit defcripta coni portio, quæ eandem ipfi bafim habeat, et eundem axem: et ducatur ab l perpendicularis l m ad d f. erit ipfa l m altitudo portionis coni, cuius uertex l. Sed coni portio, cuius uertex l: et conus, cuius uertex b habent inter fe proportionem compofitam ex proportione bafium, et proportione altitudinum. proportionem igitur habent compofitam ex ea, quam fpatium acutianguli coni fectione contentum circa diametrum a f habet ad circulum circa diametrum e c: et ex ea, quam habet l m ad b h. fpatium autem acutianguli coni fectione contentum ad eundem circulum eam proportionem habet, quam rectangulum ex diametris fectionis ad quadratum e c. quare portio coni, cuius uertex l ad conum, cuius uertex b compofitam habet proportionem ex ea, quam habet k a ad e h; et ex ea, quam l m ad b h. etenim k a dimidia eft diametri bafis portionis coni, cuius uertex l: & e h dimidia diametri bafis coni: & ipfæ l m, b h funt earum altitudines. habet autem l m ad b h eandem proportionem, quam & ad k l; quoniam b h ipfi k l eft æqualis: habetq; l m ad k l eam, quam q a ad a k. & portio coni ad conum compofitam habet proportionem ex ea, quam habet a k ad a q; æqualis enim eft a q ipfi e h: & ex ea, quam l m ad b h. Earum autem proportionum, quæ eft a k ad a q ea-



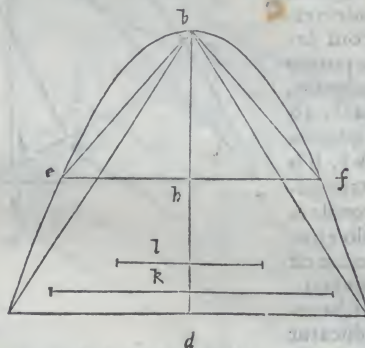

Marginal notes: 4.huius; A; B; 6.huius; C; D; E

dem eſt ei, quæ l k ad l m. Quare portio coni ad conum proportionem habet eam, quam l k ad l m, & quam l m ad b h. & eſt æqualis b h ipſi k l. perſpicuum eſt igitur portionem coni, cuius uertex l æqualem eſſe cono, cuius uertex b. unde apparet portiones quoque eſſe æquales: quoniam altera quidem earum coni ſeſquialtera eſt; altera uero ſeſquialtera portionis coni, illis inter ſeſe æqualibus exiſtentibus.

## PROPOSITIO XXVI.

SI rectanguli conoidis duæ portiones abſcindãtur planis quomodocunque ductis: portiones eandem inter ſeſe proportionem habebunt, quam ipſarum axium quadrata.

ABSCINDANTVR enim rectanguli conoidis duæ portiones, utcunque contigerit: ſitq; k linea æqualis axi unius portionis: & l axi alterius æqualis. Oſtendendum eſt, portiones eandem inter ſe proportionem habere, quam habent k l quadrata. Itaque ſecto conoide plano per axem, ſit portionis ſectio a b c rectanguli coni ſectio, cuius axis b d: ſumaturq; b d æqualis ipſi k: & per d planum ducatur ſuper axem erectum. portio autem conoidis baſim habens circulum circa diametrum a c, & axem b d æqualis eſt portioni, quæ axem habet æqualẽ ipſi k. Si quidem igitur & k æqualis eſt ipſi l: conſtat portiones quoque eſſe æquales inter ſe: utraque enim uni, & eidem eſt æqualis; & quadrata k l æqualia. quare portiones eandem inter ſe proportionem habebunt, quam quadrata axium. Si uero l ipſi k non eſt æqualis: ſit l æqualis ipſi b h: & per h ducatur planum ſuper axem erectum. portio autem baſim habens circulum circa diametrum e f, & axem b h æqualis eſt portioni, quæ axem habet æqualem ipſi l. Deſcribantur duo coni, quorum baſes quidem ſint circuli circa diametros a c, e f, uertex autem

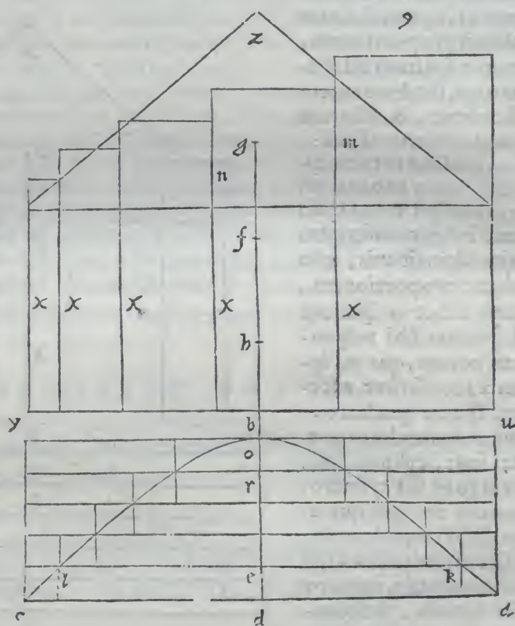



A punctum b. Itaque conus, cuius axis b d ad conum, cuius axis b h proportionem habet compoſitam ex ea, quam habet a d ad h e poteſtate: & ex ea, quam b d ha-
B bet ad b h longitudine. Quam uero proportionem habet a d ad h e poteſtate, eandem habet longitudine b d ad b h. Conus igitur, cuius axis b d ad conum, cuius axis b h compoſitam habet proportionem ex ea, quam habet d b ad h b: & ex ea,
C quam d b ad h b: hæc autem eadem eſt ei, quam d b quadratum habet ad quadratum h b. At quam proportionem habet conus, cuius axis b d ad conum, cuius axis h b, eandem habet portio conoidis axem habens d b ad portionem habentem axem h b; utraque enim ſeſquialtera eſt. & portioni quidem axem habenti b d æqualis eſt portio conoidis axem habens æqualem ipſi k: portioni uero axem habenti h b æqualis eſt conoidis portio, quæ axem habet æqualem ipſi l: & ipſi quidem b d æqualis eſt k: ipſi uero h b æqualis l. perſpicuum eſt igitur portionem conoidis, quæ axem habet æqualem ipſi k eandem proportionem habere ad portionem conoidis, quæ axem habet æqualem ipſi l, quam quadratum k ad quadratum l.

## PROPOSITIO XXVII.

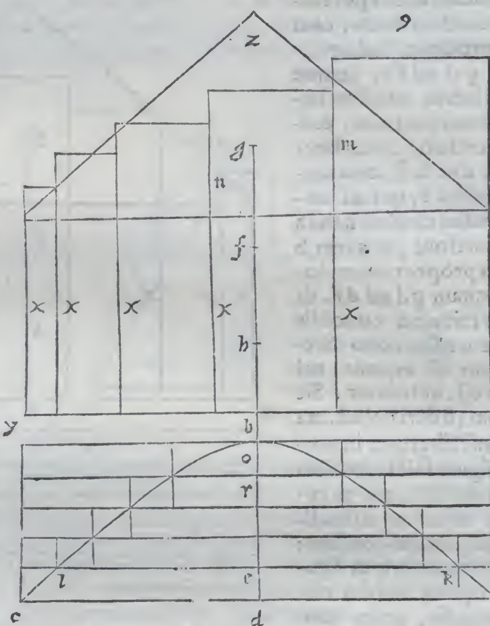
Quælibet portio obtuſianguli conoidis abſciſſa plano ſuper a-
xem erecto ad conum baſim eandem habentem ipſi, & axem
eundem, eam proportionem habet, quam utraque linea: & quæ
eſt æqualis axi portionis, & quæ tripla lineæ ad axem adiectæ, habet A
ad lineam utriſque æqualem: & axi portionis, & ei, quæ dupla eſt li-
neæ ad axem adiectæ.

Sit portio obtuſianguli conoidis abſciſſa plano ſuper axem erecto: & ſecto ip
ſo conoide altero plano per axem, ſit conoidis quidem ſectio a b c obtuſianguli co
ni ſectio: plani uero abſcindentis portionem, ſit c a recta linea: axis portionis b d:
linea ad axem adiecta b h: & ipſi b h æqualis ſit f h, & f g. Oſtendendum eſt, por-
tionem ad conum, qui baſim eandem habet portioni, & eundem axem, eam proportionem habere, quam g d ad f d. Itaque ſit cylindrus eandem baſim habens portioni, & axem eundem, cuius latera u a, c y: & ſit item conus aliquis z, qui ad conum baſim eandem habentem portioni, & axem b d, eam proportionem habeat, quam g d ad d f. dico portionem conoidis æqualem eſſe z cono. Si enim non eſt æqualis, uel maior eſt, uel minor. Sit primum, ſi fieri poteſt, maior: Inſcribaturq; in portione figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus conſtans; ita ut circumſcripta figura inſcriptam excedat minori exceſſu, quàm quo




portio conoidis excedit z conum. Educantur plana omnium cylindrorum ad ſuper
ficiem cylindri eius, qui baſim habet circulum circa diametrum a c, & axem b d. e-
rit iam totus cylindrus diuiſus in cylindros numero quidem æquales iis, qui ſunt in
figura circumſcripta, magnitudine autem maximo illorum æquales. Et quoniam B
circumſcripta figura inſcriptam minus excedit, quàm portio conum z: & circum-
ſcripta figura maior eſt ipſa portione: ſequitur & figuram inſcriptam cono z maio-
rem eſſe. Sit igitur b r tertia pars ipſius b d. erit g d ipſius h r tripla. Et quoniam C. D
cylindrus baſim habens circulum circa diametrum a c, & axem b d, ad conum ba-
ſim habentem eandem, & eundem axem, eam proportionem habet, quam g d ad h
r: habet autem & dictus conus ad conum z eam, quam f d ad g d: proportioni- E
bus non ſimiliter ordinatis, habebit dictus cylindrus ad z conum proportionem

eandem, quam f d ad h r. ſint lineæ poſitæ, in quibus x, numero quidem æquales partibus, quæ ſunt in linea b d, magnitudine uero unaquæque ipſi f b æqualis: & ad unamquanque ipſarum accedat ſpatium excedens ſpecie, quadrato; quorum maximum ſit rectangulo f d b æquale, minimum æquale ipſi f o b: latera autem exceſſuum æqualiter ſe ſe excedunt: nam quæ ſunt ipſis æquales in linea b d ſe ſe æqualiter excedunt: & ſit exceſſus maximi latus, in quo m æquale b d, minimi uero æquale b o. Sint & alia ſpatia, in quibus 9, numero quidem ipſis æqualia, magnitudine uero unumquodque æquale maximo, quod lineis f d, d b continetur. Itaque cylindrus baſim habens circulum circa diametrum a c, & axem d e ad cylindrum habentem baſim circulum circa diametrum k l, & axem d e, eam habet proportionem, quam d a ad k e poteſtate. hæc autem eadem eſt ei, quam habet rectangulum f d b ad
F rectangulum f e b. quod in omni obtuſianguli coni ſectione contingit; nam dupla eius, quæ ad axem adiecta eſt, hoc eſt eius, quæ ex centro, tranſuerſum eſt figuræ latus. & eſt rectangulo f d b æquale ſpatium x m: & rectangulo f e b æquale x n; quòd linea x æqualis ſit lineæ f b: linea uero n ipſi b e, & m ipſi b d. Cylindrus igitur baſim habens circulum circa diametrum a c, & axem d e ad cylindrum, cuius baſis circulus circa diametrum k l, & axis d e, eam habebit proportionem, quam 9 ſpatium ad ſpatium x n. ſimiliter autem oſtendetur, & aliorum cylindrorum unuſquiſque, qui ſunt in toto cylindro, axem habentium æqualem ipſi d e ad cylindrum in figura inſcripta, cuius idem ſit axis, eam habere proportionem, quam habet 9 ſpatium ad ſpatium ſibi reſpondens eorum, quæ ad ipſam x acceſſerunt, excedens ſpecie quadrato. itaq; magnitudines quædam ſunt, cylindri ipſi, qui in toto ſũt cylindro; quorum unuſquiſque axem habet æqualem d e: & aliæ magnitudines, ſpatia, in quibus 9, numero ipſis æqualia, & ſecundum quæque duo proportionem eandem habentia; quoniam & cylindri æquales ſunt inter ſe ſe; & ſpatia item 9 inter ſe ſe æqualia. referunturq; horum cylindrorum aliqui ad alios cylindros, qui ſunt in figura inſcripta: extremus autem ad nullum refertur. & ſpatiorum, in quibus 9 aliqua referuntur ad alia ſpatia, quæ ad x acceſſerunt, excedentia ſpecie, quadrato, & proportionibus reſpondentia: extremum uero ad nullum refertur. manifeſtum ergo eſt, &
G omnes cylindros, qui in toto cylindro ſunt ad cylindros omnes in figura inſcripta cõ
H tentos, eandem habere proportionem, quam omnia ſpatia 9 ad omnia accedentia
I ad x, dempto maximo. oſtenſum eſt autem, omnia ſpatia 9 ad illa omnia, dempto maximo, maiorem habere proportionem, quàm linea m x ad lineam utriſque æqualem.



lem. & dimidiæ ipſius x; & tertiæ parti m. Quare & totus cylindrus ad inſcriptam figuram maiorem proportionem habet, quàm f d ad h r. quam quidem proportionem cylindrus totus habet ad conum z, ut oſtenſum eſt. maiorem ergo proportionem habet cylindrus totus ad figuram inſcriptam, quàm ad conum z: & propterea maior eſt conus z figura inſcripta: quod fieri non poteſt. oſtenſum eſt enim figuram inſcriptam z cono maiorem eſſe. non eſt igitur conoidis portio maior cono z, ſed neque minor. Sit enim minor, ſi fieri poteſt. Rurſus inſcribatur in portione ſolida figura, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus: ita ut circumſcripta inſcriptam excedat minori exceſſu, quàm quo conus portionem excedit: & alia eadem conſtruantur. Quoniam igitur inſcripta figura minor eſt portione: & circumſcripta minus excedit inſcriptam, quàm conus z portionē; K conſtat & circumſcriptam figuram minorem eſſe cono z. Rurſus cylindrus primus eorum, qui ſunt in toto cylindro, axem habens d e, ad primum cylindrum in circumſcripta figura contentum, cuius axis d e, eam proportionem habet, quam ſpatium 9 ad ipſum m x: utrunque enim eſt æquale, & aliorum cylindrorum unuſquiſque, qui ſunt in toto cylindro, axem habentium æqualem d e, ad cylindrum, qui eſt in circumſcripta figura ſecundum ipſum, & axem habet eundem, eam habebit proportionem, quam ſpatium 9 ad ſpatium ſibi reſpondens eorum, quæ ad x acceſſerunt unà cum exceſſu: quoniam unumquodque circumſcriptorum dempto maximo, æquale eſt unicuique inſcriptorum unà cum maximo. habebit igitur & totus cylindrus ad circumſcriptam figuram eam proportionem, quam omnia ſpatia 9 ad ſpatia, quæ ad x acceſſerunt unà cum exceſsibus. Oſtenſum eſt autem rurſus omnia ſpatia 9 ad alia omnia minorem proportionem habere, quàm x m ad lineam æqualem utriſque: & dimidiæ x, & tertiæ parti m. quare & totus cylindrus ad circumſcriptam figuram minorem habebit, quàm f d ad h r. ſed ut f d ad h r, ita totus cylindrus ad z conum. minorem igitur proportionem habet idem cylindrus ad circumſcriptam figuram, quàm ad z conum; & idcirco circumſcripta figura maior erit z cono: quod eſſe non poteſt, cum oſtenſum ſit circumſcriptam figuram z cono maiorem eſſe. non igitur minor eſt conoidis portio cono z. Quoniam autem neque maior eſt, neque minor: oſtenſum iam erit, quod proponebatur. L

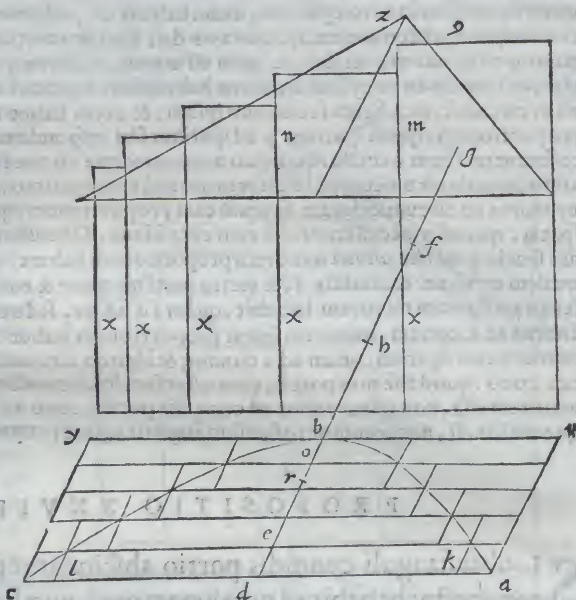
## PROPOSITIO XXVIII.

SI obtuſianguli conoidis portio abſcindatur plano ſuper axem non erecto: habebit ad portionem coni, quæ baſim habet ipſi eandem, & axem eundem, eam proportionem, quam linea utriſque æqualis: & axi portionis, & triplæ eius, quæ adiecta eſt ad axem, ad lineam æqualem utriſque; & axi portionis, & ei, quæ dupla eſt lineæ ad axem adiectæ.

SIT enim portio obtuſianguli conoidis abſciſſa plano, ut dictum eſt: & ſecta figura altero plano per axem, erecto ſuper planum portionem abſcindens, ſit figuræ quidem ſectio a b c obtuſianguli coni ſectio: plani uero abſcindentis portionem recta linea c a: & uertex coni continentis conoides ſit h punctum. ducaturq; per b linea u y æquidiſtans lineæ a c: & contingens coni ſectionem in b: & ab h ad b linea ducta producatur. ſecabit eadem ratione bifariam ipſam a c: & erit b punctum A portionis uertex: axis b d: & b h linea ad axem adiecta. ipſi autem b h æqualis ſit & h f & f g: & ab ipſa u y planum attollatur æquidiſtans plano ſecundum a c; quod co B noides in b puncto continget. Et quoniã planũ ſecundum a c, non erectũ ſuper axē ſecuit conoides: ſectio erit acutiãguli coni ſectio, cuius diameter maior c a. Itaq; cũ C acutianguli coni ſectio ſit circa diametrũ a c: & linea b d à cētro ſit eleuata nõ perpē-

dicularis

dicularis in plano, quod est à diametro ipsa erectum super planum, in quo acutianguli coni sectio consistit: cylindrum inuenire poterimus habentem axem in recta linea b d; in cuius superficie sit acutianguli coni sectio circa diametrum a c. hoc igitur inuento, erit aliqua portio cylindri basim habens eandem portioni conoidis, &
E eundem exem; cuius altera basis erit planum secundum u y. Rursus & conum inuenire poterimus uerticem habentem punctum b; in cuius superficie sit acutianguli co
F ni sectio, circa diametrum a c. hoc inuento erit portio coni basim habens eandem dictis portionibus, & axem eundem. Ostendendum est, conoidis portionem ad portionem coni dictam, eandem proportionem habere, quam g d ad d f. Quam uero
G ro proportionem habet g d ad d f, habeat conus z ad portionem coni. Dico portionem conoidis cono z esse æqualem: si enim nō est æqualis, sit maior si fieri potest. inscribatur autem in conoidis portione figura solida, & altera circumscribatur, ex cylindrorum portionibus eandem altitudinem habentibus: ita ut circumscripta figura excedat inscriptam minori excessu, quàm quo portio conoidis excedit conum z. Quoniam igitur circumscripta figura, quæ portione maior est, minus excedit inscriptam, quàm portio conum z: sequitur inscriptam figuram cono z maiorem esse. educantur plana portionum omnium in figura inscriptarum. pertingent ea, ad superficiem portionis cylindri basim habentis eandem portioni conoidis, & axem eundem. & sit b r pars tertia ipsius b d: & alia eadem superioribus fiant. Rursus prima portio earum, quæ sunt in tota cylindri portione, habens axem d e ad primam portionem in figura inscripta, axem habentem d e, eam habet proportionem, quam a d quadratum ad quadratum k e. portiones enim, quarum altitudo est æqualis, eam inter se propor
H tionem habent, quam ipsarum bases. bases autem cum similes acutiangulorum conorum sectioues sint, habent eam, quam eiusdem rationis diametri potestate inter
I se habent. Quam uero proportionem quadratum a d habet ad quadratum k e, ean
K dem habet rectangulum f d b ad rectangulum f e b; quoniam f d ducta est per h, in quo lineæ, quæ sunt sectioni proximæ conueniunt: & ipsæ a d, k e æquidistantes sunt ei, quæ in puncto b contingit. est autem rectangulum f d b æquale spacio 9: & rectangulum f e b æquale ipsi x n. quare prima portio earum, quæ sunt in tota portione, axem habens d e ad primam portionem in figura inscripta habentem axem d e,



d e, eandem habet proportionem, quam ſpatium 9 ad x n ſpatium: & unaquæque aliarum portionum, quæ ſunt in tota portione, axem habentium æqualem ipſi d e ad portionem in figura inſcripta, quæ eſt ſecundum ipſam, & axem habet ipſi d e æqualem, eam proportionem habet, quam ſpatium 9 ad ſpatium ſibi reſpondens eorum, quæ ad x acceſſerunt, exceduntq; ſpecie, quadrato. Rurſus ſunt quædam magnitudines, portiones ſcilicet in tota portione contentæ: & aliæ item magnitudines, ſpatia in quibus 9, numero quidem æquales portionibus, & ſecundum quaſque duas eandem ipſis proportionem habent: referunturq; portiones ad portiones alias, quæ ſunt in figura inſcripta: ſed extrema portio ad nullam refertur. ſpatia uero 9 ad alia ſpatia referuntur, quæ ad x acceſſerunt, excedentia ſpecie quadratis, & proportionibus reſpondentia; extremum autem ad nullum refertur. Perſpicuũ eſt igitur & omnes portiones ad alias omnes eandem habere proportionem, quam ſpatia omnia 9 ad omnia, quæ ad x acceſſerunt, dempto maximo. At uero ſpatia 9 omnia ad omnia, quæ ad x acceſſerunt, dempto maximo, maiorem habent proportionem, quàm linea m x ad lineam æqualem utriſque; & dimidiæ x & tertiæ parti ipſius m. Quare tota portio ad inſcriptam figuram maiorem proportionem habet, quàm linea x m ad eam; quæ utriſque eſt æqualis; & dimidiæ x; & tertiæ parti m: & propterea maiorem, quam f d ad h r. maiorem igitur proportionem habet tota portio ad inſcriptam figuram, quàm ad z conum: quod fieri non poteſt. oſtenſum nanque eſt figuram inſcriptam cono z maiorem eſſe. non ergo maior eſt conoidis portio cono z: Quòd ſi conoidis portio cono z minor ponatur, inſcripta in portione ſolida figura, & altera circumſcripta ex cylindri portionibus æqualem altitudinem habentibus: ita ut circumſcripta figura excedat inſcriptam minori exceſſu, quàm quo conus portionem excedit: rurſus ſimiliter oſtendetur, circumſcriptam minorem eſſe cono z; & cylindri portionem, quæ baſim habet portioni eandem, & axem eundem ad figuram circumſcriptam minorem proportionem habere, quam ad z conum; quod item fieri non poteſt. non eſt igitur neque minor conoidis portio cono z. Quare manifeſte conſtat, quod fuerat propoſitum.

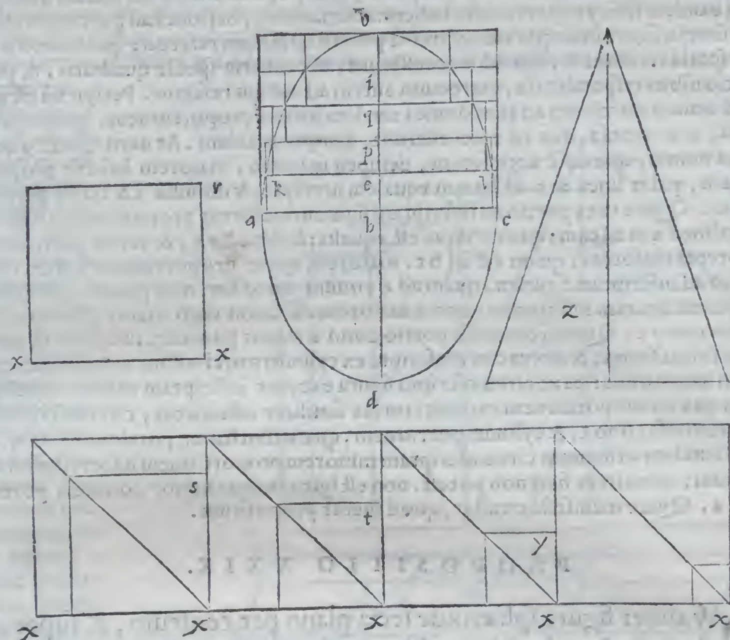
## PROPOSITIO XXIX.

Qualibet figura ſphæroide ſecta plano per centrum, & ſuper axem erecto, dimidium ſphæroidis duplum eſt coni baſim habentis portioni eandem, & axem eundem.

Sit enim ſphæroidis figura ſecta plano per centrum, & ſuper axem erecto: & ipſa ſecta altero plano per axem, ſit figuræ quidem ſectio a b c d acutianguli coni ſectio, cuius diameter, & axis ſphæroidis b d, centrum h. (nihil enim refert, utrum b d ſit maior diameter ſectionis coni acutianguli, an minor) plani uero ſecantis figuram, ſit ſectio recta linea c a. tranſibit ipſa per h: & rectos faciet angulos cum linea b d: quoniam planum ponitur per centrum duci, & erectum eſſe ſuper axem. Oſtendendum eſt dimidiam ſphæroidis portionem, quæ baſim habet circulum circa diametrum a c & uerticem b, duplam eſſe coni baſim habentis portioni eandem, & axem eundem. Sit enim conus aliquis, in quo z, duplus coni, qui baſim habet eandem portioni, & eundem axem, uidelicet h b. Dico dimidium ſphæroidis æquale eſſe cono z. ſi enim non eſt æquale. Sit primum maius, ſi fieri poteſt, & inſcribatur in dimidia portione ſphæroidis, ſolida figura, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus; ita, ut circumſcripta figura inſcriptam excedat minori exceſſu, quàm quo dimidium ſphæroidis excedit conum z. Quoniam igitur circũſcripta figura maior eſt dimidio ſphæroide: & minus excedit figuram inſcriptam, quàm dimidiũ ſphæroidis conum z: conſtat & inſcriptam in dimidia ſphæroidis portione figuram cono z maiorem eſſe. itaque ſit cylindrus baſim habens circulum circa diametrũ a c, axem uero b d, et quoniã hic cylindrus triplus eſt coni baſim haben-

tis

tis portioni eandem, & axem eundem: & conus z duplus eſt eiuſdem coni: ſequitur cylindrum coni z eſſe ſeſquialterum. Educantur iam plana cylindrorum omnium, ex quibus conſtat inſcripta figura. pertingent hæc ad cylindri ſuperficiem, qui baſim habet eandem portioni, & axem eundem: atque erit totus cylindrus diuiſus in cylindros, numero quidem æquales iis, qui ſunt in circumſcripta figura, magnitudine uero æquales maximo illorum. Sint prætera lineæ poſitæ in quibus x x, numero




æquales partibus rectæ lineæ b h: & magnitudine ipſi b h æquales. Ab unaquaque autem illarum quadratum deſcribatur. & ab extremo quadrato auferatur gnomon, latitudinem habens æqualem b i. erit hic æqualis rectangulo b i d. At uero à quadrato illi proximo gnomon auferatur, qui latitudinem habeat ipſius b i. duplam: atque erit hic rectangulo d q b æqualis: ſemperq; à quadrato ſequente gnomon auferatur latitudinem habẽs una parte maiorem, quã ſit latitudo gnomonis proxime ablati. erit ipſorum unuſquiſque æqualis rectangulo partibus b d contento; quarum altera pars gnomonis latitudini eſt æqualis; & à quadrato ſecundo reliquum erit quadratum latus habens æquale ipſi h e. Cylindrus autem primus eorum, qui ſunt in toto cylindro axem habens b e ad primum cylindrum in figura inſcripta, cuius idem eſt axis, eam habet proportionem, quam quadratum a h ad quadratum k e. quare & quam rectangulum b h d ad rectangulum b e d. ergo cylindrus ad cylindrum eam habet, quam primum quadratum ad gnomonem à ſecundo quadrato ablatum. Similiter & aliorum cylindrorum unuſquiſque axem habentium æqualem ipſi h e ad cylindrum in figura inſcripta, cuius idem eſt axis, eam habet proportionem, quam quadratum ipſi reſpondens ad gnomonem à quadrato proxime ſequenti ablatum. Sunt igitur magnitudines quædam, cylindri ipſi, qui in toto ſunt cylindro; & aliæ magnitudines, quadrata, quæ fiunt à lineis x x, numero æquales cylindris; & quæque duæ eandem habent proportionem. referuntur autem cylindri ad alias magnitudines, ad cylindros ſcilicet, qui ſunt in figura inſcripta; at extremus ad nullũ refertur: & quadrata

Margin notes: A (beside "tur latitudinem habẽs…"), B (beside "axis, eam habet proportionem…")

drata itē referuntur ad alias magnitudines, ad gnomones à quadratis ablatos, respondentia iisdem proportionibus; extremum autem quadratum ad nullum refertur. Quare omnes cylindri, qui in toto sunt cylindro, ad alios cylindros omnes eandem habebunt proportionem, quam omnia quadrata ad gnomones omnes ab ipsis ablatos. ergo cylindrus basim habens eandem portioni, & axem eundem, ad inscriptam figuram eam proportionem habet, quam quadrata omnia ad omnes gnomones ab ipsis ablatos. Quadrata autem, gnomonum omnium ablatorum ab ipsis maiora sunt, quàm sesquialtera. nam sunt quædam lineæ positæ x r, x s, x t, x y, x u sese æqualiter excedentes, & minima excessui est æqualis; sunt etiam aliæ lineæ, in quibus x x, numero quidem æquales illis, magnitudine uero unaquæque maximæ illarum æqualis. Quadrata igitur linearum omnium, quæ sunt æquales maximæ, quadratorum omnium linearum, quæ se se æqualiter excedunt, minora sunt, quàm tripla: reliquorum autem, dempto maximæ quadrato, maiora, quàm tripla. hoc enim in iis, C quæ de spiralibus lineis edidimus, demonstratum est. Quoniam autem quadrata omnia minora sunt, quàm tripla aliorum quadratorum, quæ ab ipsis ablata fuerunt: perspicuum est reliquorum spatiorum maiora esse, quàm sesquialtera. gnomonum igitur omnium maiora sunt, quam sesquialtera. quare & cylindrus basim habens eādem portioni, & axem eundem, maior est, quàm sesquialter inscriptæ figuræ; quod fieri nullo modo potest. est enim coni z sesquialter: & inscripta figura maior ostensa est cono z. non ergo dimidium sphæroidis cono z maius erit. sed neque minus. Sit enim minus, si fieri potest. Rursus inscribatur in dimidio sphæroidis figura solida, & altera circumscribatur ex cylindris, qui æqualem altitudinem habeant: ita ut circumscripta figura inscriptam minus excedat, quàm conus z dimidium sphæroidis. & alia eadem prioribus construantur. Quoniam igitur inscripta figura minor est portione: constat & circumscriptam cono z minorem esse. Rursum primus cylindrus eorum, qui sunt in toto cylindro, axem habens h e, ad primum cylindrum in figura circumscripta, cuius axis h e, eam habet proportionem, quam primū quadratum ad semetipsum. secundus autem cylindrus, eorum, qui in toto cylindro, habens axem e p ad secundum cylindrum in circumscripta figura, cuius axis e p, eandem habet, quam quadratum secundum ad gnomonem ab ipso ablatum. & aliorum cylindrorum unusquisque, qui in toto cylindro sunt, axem habentium æqualem ipsi h e ad cylindrum in figura inscripta, qui est secundum ipsum, eandem proportionem habet, quam quadratum ei respondens ad gnomonem ab ipso ablatum. & omnes igitur cylindri, qui sunt in toto cylindro ad cylindros omnes, qui in figura circumscripta, eandem habebunt proportionem, quam quadrata omnia ad id, quod est æquale primo quadrato, & gnomonibus iis, qui a reliquis quadratis auferuntur. Quadrata autem omnia minora sunt, quàm sesquialtera eius, quod est æquale primo quadrato, & gnomonibus, qui à reliquis sunt ablati; propterea, quòd quadratorum, quæ fiunt à lineis se se æqualiter excedentibus, dempto eo, quòd à maxima, maiora sunt, quàm tripla. Cylindrus igitur basim habens eandem portioni, & eundem axem, minor est, quàm sesquialter circumscriptæ figuræ; quod fieri non potest: est enim coni z sesquialter; & circumscripta figura minor ostensa est z cono. non ergo dimidium sphæroidis cono z minus erit. & quoniam neque maius est, neque minus: necessario erit æquale.

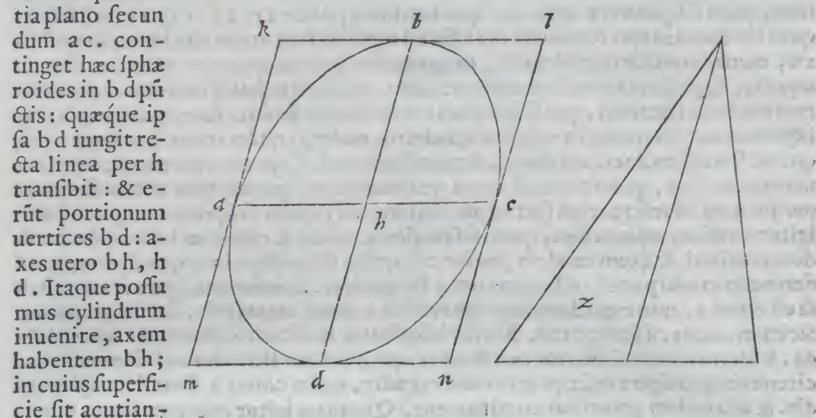
## PROPOSITIO XXX.

Si sphæroides figura secetur plano per centrum ducto, & non erecto super axem: similiter dimidium sphæroidis duplum erit portionis coni, quæ basim habeat portioni eandem, & eundem axem.

SECETUR enim figura sphæroides, ut dictum est: & ipsa secta altero plano per

axem, erecto super planum secans, sit figuræ quidem sectio a b c d acutianguli coni sectio, cuius centrum h: plani uero secantis figuram sit a c recta linea. transibit igitur ipsa per h; quoniam planum ponitur per centrum transire: atque erit acutianguli coni sectio quædam circa diametrum a c; cum positum sit planum secans non esse erectum super axem. Ducantur quædam lineæ k l, m n æquidistantes ipsi a c, contingentesq; acutianguli coni sectionem in punctis b d: & ab ipsis k l, m n plana attollantur æquidistãtia plano secundum a c. continget hæc sphæroides in b d pũctis: quæque ipsa b d iungit recta linea per h transibit: & erũt portionum uertices b d: axes uero b h, h d. Itaque possumus cylindrum inuenire, axem habentem b h; in cuius superficie sit acutianguli coni sectio circa diametrum a c. Hoc autem inuento, erit quædam portio cylindri, quæ eandem basim habeat dimidio sphæroidi, & axem eundem. Rursus & conum inuenire possumus, uerticem habentem punctum b, in cuius superficie acutianguli coni sectio consistat, circa diametrum a c: atque eo inuento, erit portio coni, quæ eandem portioni basim, & axem habeat eundem. Dico iam sphæroidis dimidium duplum esse huius coni portionis. Sit conus z duplus portionis coni. & si quidem dimidium sphæroidis non est æquale cono z: sit primum maius, si fieri potest: inscribaturq; in dimidio sphæroidis figura solida, & altera circumscribatur ex cylindri portionibus æqualem habentibus altitudinem; ita ut circumscripta figura inscriptam excedat minori excessu, quàm quo dimidium sphæroidis excedit conum z. Similiter iis, quæ prius dicta sunt, ostendetur inscripta figura maior cono z: & portio cylindri basim habens eandem portioni, & axem eundem, ipsius quidem z coni sesquialtera; figuræ uero in dimidio sphæroidis inscriptæ, maior, quàm sesquialtera: quod fieri non potest. non est igitur dimidium sphæroidis cono z maius. Quòd si minus ponatur esse: inscribatur in dimidio sphæroide figura solida, & altera circumscribatur ex cylindri portionibus altitudinem æqualem habentibus; ita ut circumscripta excedat inscriptam minori excessu, quàm quo z conus dimidium sphæroidis excedit. Rursus similiter ostendetur circumscripta figura cono z minor: & portio cylindri, quæ basim habeat portioni eandem, & axem eundem, ipsius quidem coni z sesquialtera; circumscriptæ uero figuræ minor, quàm sesquialtera: quod item fieri non potest. non erit igitur neque minus dimidium sphæroidis cono z. Quoniam autem neque maius est, neque minus: sequitur, ut sit æquale. Vnde constat, quod oportebat demonstrare.

A



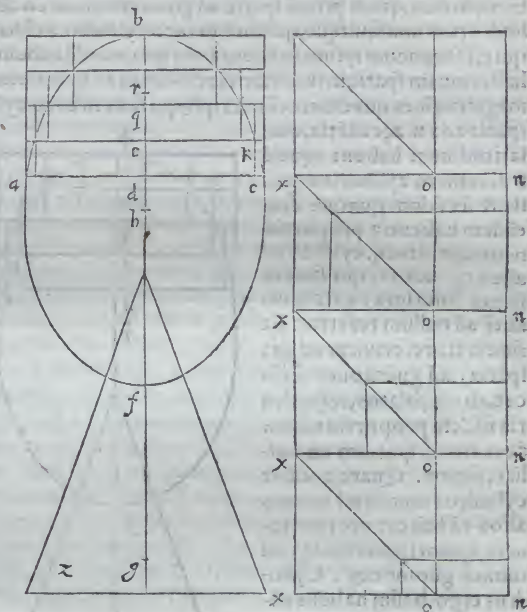

B

## PROPOSITIO XXXI.

Qvalibet figura sphæroide secta plano non per centrum ducto, sed erecto super axem, minor portio ad conum basim habentem

tem eandem portioni, & axem eundem, eam proportionem habet, quam utraque linea; & dimidia axis ſphæroidis, & axis maioris portionis ad maioris portionis axem.

SIT enim portio quædam ſphæroidis figuræ, abſciſſa plano, ſuper axem erecto, non autem per centrum ducto; & ipſa figura ſecta altero plano ſecundum axem; ſit figuræ quidem ſectio a b c acutianguli coni ſectio: diameter ſectionis, & axis ſphæroidis b f; centrum h: planiuero abſcindentis portionem ſectio ſit a c recta linea, quæ rectos angulos faciet cum ipſa b f; quoniam planum ſuper axem erectum eſſe poſuimus. Sitq; portio abſciſſa cuius uertex b, minor dimidio ſphæroidis figuræ: & ipſi b h æqualis ſit f g. demonſtrandum eſt, portionem, cuius uertex b ad conum, qui baſim habet eandem portioni, & eundem axem, eam proportionem habere, quam d g ad d f. Sit autem cylindrus eandem baſim habẽs minori portioni, & eundem axem: & ſit conus z, qui ad conum baſim eandem habentem, eam proportionem habeat, quam d g ad d f. Dico conum z æqualem eſſe portioni, quæ uerticem habet b pũctum. Si enim non eſt æqualis: ſit primum minor, ſi fieri poteſt: inſcribaturq; in portione figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus; ita ut circumſcripta inſcriptam excedat minori exceſſu, quàm quo portio ſphæroidis excedit conum z. Quoniam igitur circumſcripta figura, quæ portione maior eſt, minus excedit inſcriptam, quàm portio conum: conſtat figuram inſcriptam maiorem eſſe cono z. Sit autem b r tertia pars ipſius b d. & quoniam b g tripla eſt ipſius b h: & b d item tripla ipſius b r: erit & d g ipſius h r tripla. Itaque cylindrus baſim habens eandem portioni & axem b d, ad conum habentem baſim eandem, & eundem axem, eam proportionem habet, quam d g ad h r. conus autem dictus ad z conum habet eam, quam d f ad d g. Quare proportionibus non ſimiliter ordinatis, cylindrus, cuius baſis eadem portioni, & idem axis, ad conum z eam proportionem habebit, quam d f ad h r. Sint præterea lineæ poſitæ, in quibus x n, numero quidem æquales partibus lineæ b d, magnitudine uero unaquæque ipſi f d æqualis: & ſit ipſarum x o unaquæque æqualis b d. erit ergo unaquæque n o dupla ipſius h d. Accedat ad unamquanque ipſarum, ſpatium quoddam, cuius latitudo ſit æqualis b d: ita ut in unoquoque quadratum ſit diametrum habens. auferatur autem à primo ſpatio gnomon, qui latitudinem habeat æqualem b e: & à ſecundo item auferatur gnomon, cuius latitudo æqualis b q: & ſimiliter ab unoquoque ſubſequente ſpatio,

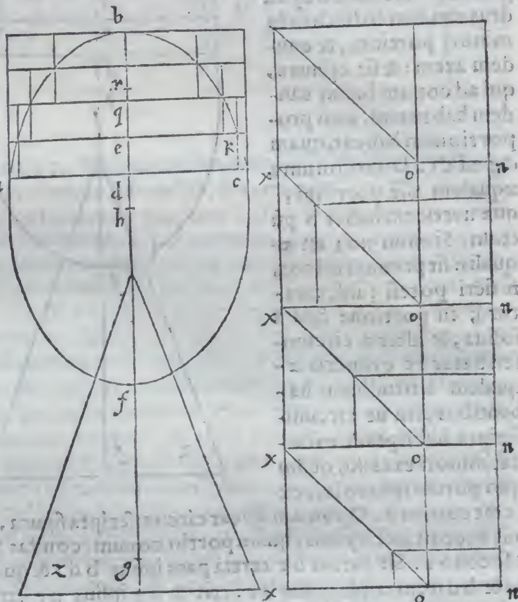



A

B

C

gnomon auferatur latitudinem habens una parte minorem, quàm ſit latitudo gno-
monis proxime ablati. erit igitur gnomon à primo ſpatio ablatus æqualis rectangu-
lo b e f: & reliquum ſpatium accedens ad n o, excedens ſpecie quadrato, quod la-
tus exceſſus habet æquale ipſi d e. à ſecundo autem ſpatio gnomon ablatus æqualis
erit b q f rectangulo: & reliquum ſpatium accedens ad n o, excedens ſpecie quadra
to, & reliqua eodem modo. His ita habentibus, plana cylindrorum omnium qui-
bus conſtat inſcripta in portione figura, pertingent ad cylindri ſuperficiem baſim ha
bentis eandem portioni, & axem eundem: eritq; totus cylindrus diuiſus in cylindros
numero quidem æquales iis, qui ſunt in circumſcripta figura, magnitudine uero ma
ximo eorum æquales. Itaque primus cylindrus eorum, qui in toto cylindro ſunt ha-
bens axem d e ad primũ cylindrum in figura inſcripta, cuius axis d e, eam propotio-
nem habet, quam d c quadratum ad quadratum k e. hæc autem eadem eſt illi quam ha
bet rectangulum b d f ad rectangulum b e f. habet ergo cylindrus ad cylindrũ propor
tionem eam, quam primũ ſpatiũ ad gnomonem ab eo ablatũ: & ſimiliter aliorum cy-
lindrorum unuſquiſque, qui ſunt in toto cylindro, axẽ habẽs æqualem d e ad cylindrũ,
qui eſt ſecundum ipſum in figura inſcripta, eundẽ habentem axem eam proportionẽ
habet, quam ſpatium ſimiliter ei reſpõdens ad gnomonem ab eo ablatũ. ſunt igitur
magnitudines quædam, cylindri ipſi, qui ſunt in toto cylindro; & aliæ magnitudines,
ſpatia ad x n accedẽtia, quæ
latitudinem habent æqualẽ
b d, numero cylindris æqua-
lia, & ſecũdum quæque duo
eãdem habentia proportio
nem: referũturq; cylindri ad
alios cylindros, qui ſunt in
figura inſcripta: extremus
autẽ ad nullum refertur. Et
ſpatia itẽ referuntur ad alia
ſpatia, ad gnomones ſcili-
cet, ab eis ablatos, reſpõden
tia iiſdem proportionibus:
at extremũ ſpatium ad nul-
lũ refertur. Quare conſtat
cylindros omnes ad omnes
alios eã habere proportio-
nem, quam ſpatia omnia ad
omnes gnomones. Cylin-
drus ergo baſim habens eã-
dem portioni, & axem eun-
dem, ad figuram portioni in
ſcriptam, eam proportionẽ
A haebit, quam ſpatia omnia
ad omnes gnomones. Et




quoniã ſunt quædã lineæ æquales poſitæ, in quibus n o: & ad unãquãque accedit ſpatiũ
excedẽs ſpecie quadrato: latera autẽ exceſſuum ſe ſe æqualiter excedunt: & exceſſus
minimæ illarum eſt æqualis: ſunt præterea alia ſpatia accedentia ad n x, quæ latitudinẽ
habent æqualem ipſi b d, numero quidem ſpatiis dictis æqualia, magnitudine uero
D unumquodque æquale maximo: manifeſtum eſt omnia ſpatia, quorum unumquod-
que maximo eſt æquale, ad alia omnia minorem habere proportionem, quàm c n
E ad lineam æqualem utriſque; & dimidiæ n o, & tertiæ parti x o. Quare conſtat ſpa-
tia eadem ad omnes gnomones maiorem proportionem habere, quàm x n ad lineã
utriſque æqualem; & dimidiæ n o, & duabus tertiis x o. cylindrus igitur baſim habẽs
eandem portioni, & axem eundem ad figuram in portione inſcriptam maiorem pro-
portionem habet, quàm x n ad eam, quæ utriſque eſt æqualis; & dimidiæ n o, & dua-
bus

bus tertiis x o. est autem d f ipsi x n æqualis: dimidiæq; n o æqualis d h: & duabus ter tiis x o ipsa d r. Quare totus cylindrus ad figuram inscriptam in portione, maiorem proportionem habet, quàm d f ad h r. sed quam proportionem habet d f ad h r, eã demonstratum est habere eundem cylindrum ad conum z. maiorem igitur proportionem habebit cylindrus ad inscriptam figuram, quam ad conum z: quod fieri non potest; nam demonstratum est, figurã inscriptam in cono z maiorem esse. non ergo sphæroidis portio maior est cono z. Sed si fieri potest, sit minor: Inscribaturq; rursus in portione figura solida; & altera circumscribatur, ex cylindris æqualem altitudinem habentibus: ita ut circumscripta inscriptam excedat minori excessu, quàm quo conus z portionem excedit: & alia eadem prioribus fiant. Quoniam igitur inscripta figura portione minor est: & circumscripta inscriptam minus excedit, quàm z conus portionem: patet circumscriptam figuram minorem esse z cono. Rursus primus cylindrus eorum, qui sunt in toto cylindro, axem habens d e, ad primum cylindrum in circumscripta figura, cuius idem est axis, eam proportionem habet, quam extremum spatiũ eorum, quæ ad x n accedunt, latitudinem habentium æqualem b d ad semetipsum; utraque enim sunt æqualia. secundus autem cylindrus eorum, qui in toto cylindro, axem habens æqualem d e ad cylindrum, qui secundum ipsum est in circumscripta figura, eãdem habet proportionem, quam secundum spatium eorum, quæ accedunt ad n x, latitudinem habentium æqualem b d, ad gnomonem ab ipso ablatum & aliorum cylindrorũ unusquisque, qui sunt in toto cylindro, axem habentium ipsi d e æqualem, ad cylindrum, qui secundum ipsum est, in circũscripta figura, eam proportionem habet, quam spatium ipsi respõdens eorum, quæ ad x n accedunt, ad gnomonem ab ipso ablatum ante extremum dictum. & omnes igitur cylindri, qui in toto cylindro sunt, ad cylindros omnes in circũscripta figura eandem habebunt proportionem, quam omnia spatia accedentia ad x n, ad id, quod est æquale extremo spatio, & gnomonibus ab aliis ablatis, propter eadem, quæ superius dicta sunt. Et quoniã ostensum est, spatia omnia accedentia ad n o, ad omnia spatia, quæ excedunt specie, quadrato, dempto maximo eorum, maiorem habere proportionem, quàm x n ad lineã utrisque æqualem; & dimidiæ n o; & tertiæ parti x o: perspicuum est, spatia eadem ad reliqua, quæ æqualia sunt extremo spatio posito, & gnomonibus à reliquis ablatis, minorem proportionem habere, quàm x n ad lineam utrisque æqualem; dimidiæ scilicet n o, & duabus tertiis x o. unde constat cylindrum basim habentem eandem portioni, & axem eundem, ad figuram circũscriptam, minorem proportionem habere, quàm f d ad h r. Quam uero proportionem habet f d ad h r, eandem habet dictus cylindrus ad conum z. minorem ergo proportionem habet idem cylindrus ad circumscriptam figuram, quàm ad conum z: quod fieri non potest; ostensum est enim circumscriptam figuram cono z minorem esse. non igitur portio sphæroidis minor est cono z. Quoniam autem neque maior est, neque minor: relinquitur eidem esse æqualem.

## PROPOSITIO XXXII.

SI sphæroides secetur plano neque erecto super axem, neque per centrum ducto; minor eius portio ad portionem coni basim habẽtis ipsi eandem, & eundem axem, eam proportionem habebit, quam linea æqualis utrisque; & dimidiæ eius, quæ uertices portionum facta rum coniungit, & axi maioris portionis, ad maioris portionis axem.

SECETVR enim sphæroidis figura quæpiam, ut dictum est: sectaq; ipsa altero plano per axem, erecto super planum secans, sit figuræ quidem sectio a b c d acutianguli coni sectio: plani autem figuram secantis recta linea c a: & ducantur lineæ p r, s t, ipsi a c æquidistantes, quæ contingant coni sectionem in punctis b f: & ab ipsis plana attollantur æquidistantia plano secundum a c. contingent hæc

sphæroides

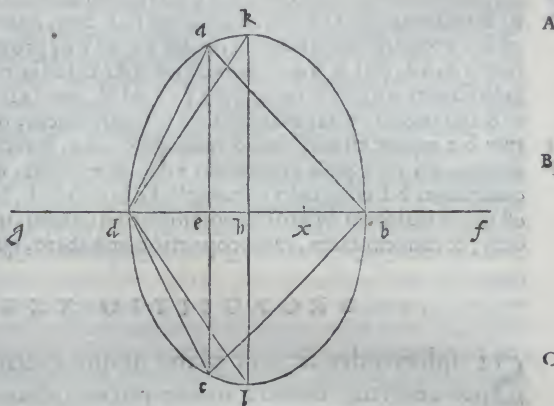
A ſphæroides in b f punctis: & erunt uertices portionum coniuncti ducta linea b f, quæ per centrum tranſibit. Sit autem centrum ſphæroidis, & acutianguli coni ſectionis punctum h. Quoniam igitur poſitum eſt, ſecari figuram plano non erecto ſuper axem: ſectio eſt acutianguli coni ſectio, cuius diameter c a. Itaque ſumatur & cylindrus axem habens in recta linea b d, in cuius ſuperficie acutianguli coni ſectio ſit circa diametrum a c: & conus uerticem habens punctum b, in cuius ſuperficie ſit acutianguli coni ſectio, circa diametrum a c. erit iam portio quædam cylindri baſim habens portioni eã dem, & axem eundem: & portio coni, quæ eandem portioni baſim, & axem eundem habeat. Oſtendendum eſt, ſphæroidis portionẽ, cuius uertex b, ad portionem coni, quæ baſim habet ipſi eandem, & eũdem axem, eam proportionem habere, quam d g ad d f. ſit autem f g æqualis h f: & ſumatur aliquis conus z, qui ad coni portionem baſim habentem eandem portioni, & axem eundem, eam proportionem habeat, quam d g ad d f. Si igitur non eſt æqualis portio ſphæroidis z cono: ſit primum maior, ſi fieri poſsit: Inſcribaturq; in portione ſphæroidis figura ſolida; & altera circumſcribatur ex cylindri portionibus altitudinem æqualem habentibus: ita ut circumſcripta inſcriptam excedat minori exceſſu, quàm quo portio ſphæroidis excedit z conum. ſimiliter antecedenti oſtendetur, inſcriptam figuram cono z maiorem eſſe: & portionem cylindri, quæ baſim habeat portioni eandem, & eundem axem, ad inſcriptam figuram maiorem proportionem habere, quàm ad z conum: quod fieri non poteſt, non erit igitur ſphæroidis portio cono z maior. Sed ſit minor, ſi fieri poteſt. Rurſus in portione inſcripta ſit ſolida figura: & altera circumſcripta ex cylindri portionibus æqualem altitudinẽ habentibus: ita ut circumſcripta excedat inſcriptam minori exceſſu, quàm quo z conus portionem excedit. oſtendetur eadem ratione circumſcriptam figuram minorem eſſe z cono: & portionem cylindri, quæ baſim habet portioni eandem, & axem eundem, ad circumſcriptam figuram minorem proportionem habere, quàm ad conum z: quod fieri non poteſt. non erit igitur ſphæroidis portio neque cono z minor, quare conſtat, quod oportebat demonſtrare.

## PROPOSITIO XXXIII.

CVIuslibet figuræ ſphæroidis ſectæ plano erecto ſuper axem, nõ autem per centrum ducto, maior portio ad conum baſim habentem eandem portioni, & eundem axem, eam proportionem habet, quam linea utriſque æqualis; & dimidiæ axis ſphæroidis; & minoris portionis axi, ad axem minoris portiouis.

SECETVR aliquod ſphæroides, ut dictum eſt: ſectoq; ipſo altero plano per axẽ, erecto

erecto super planum secans, figuræ quidem sectio sit a b c acutianguli coni sectio, cuius diameter, & axis figuræ b d: plani autem secantis recta linea c a. erit igitur c a ad rectos angulos ipsi b d. Sit maior portio, cuius uertex b: & centrum sphæroidis h: apponaturq; d g æqualis d h: & b f eidem æqualis. ostendendum est portionem sphæroidis, cuius uertex b ad conum basim habentem eandem portioni, & eundem axem, eam proportionem habere, quam e g ad e d. Itaque secetur sphæroides per centrum plano super axem erecto: & à facto circulo conus sit uerticem habens punctum d. est igitur totum sphæroides duplum portionis, quæ basim habet circulum circa diametrum k l, & uerticem d. dicta autem portio dupla est coni basim habentis ipsi eandem & axem eundem; hæc enim iam demonstrata sunt. Quare totum sphæroides dicti coni quadruplum erit. At uero hic conus ad conum habentem pro basi circulum circa diametrum a c, & uerticem d, compositam proportionem habet ex ea, quam h d ad e d; & ex ea, quam quadratum k h ad quadratum e a. proportio autem, quam habet quadratum k h ad quadratum e a, eadem est illi, quam rectangulum b h d habet ad rectangulum b e d: & quam proportionem habet h d ad e d, eandem habet x d ad h d. habebit igitur rectangulum contentum x d, b h ad rectangulum b h d eam proportionem, quam d h ad d e. composita autem proportio ex ea, quam habet rectangulum contentum x d, h b ad rectangulum b h d; & ex ea, quam rectangulum b h d habet ad rectangulum b e d, eadem est ei, quam habet rectangulum contentum x d, h b ad rectangulum b e d. Conus ergo basim habens circulum circa diametrum k l, & uerticem punctum d ad conum basim habentem circulum circa diametrum a c, & uerticem d, eandem proportionem habet, quam rectangulũ cõtentũ x d, h b ad rectangulum b e d. At conus basim habens circulum circa diametrum a c, & uerticem d ad portionem sphæroidis habentem basim eandem ipsi, & eundem axem, eam habet proportionem, quam rectangulum b e d ad rectangulum f e d. hoc est, quam b e ad e f. minus enim, quàm dimidium sphæroidis ad conum basim habentem eãdem portioni, & axem eundem, ostensum est eam habere proportionem, quam linea utrisque æqualis, & dimidiæ axis sphæroidis, & axi maioris portionis ad axem maioris portionis. Ea autem est quam habet f e, ad b e. Conus igitur, qui est in dimidio sphæroide ad portionẽ sphæroidis dimidio minorem, eam proportionem habet, quam rectangulum contentũ x d, b h ad rectangulum f e d. Et quoniam totũ sphæroides ad conum, qui est in dimidio sphæroide, eam habet proportionem, quam rectangulum f g, x d ad rectangulũ b h, x d. Vtrunque enim quadruplum est, conus autem, qui in dimidio sphæroide ad portionem dimidio minorem, eam habet, quam rectangulum x d, b h ad rectangulum f e d. habebit & totum sphæroides ad portionem eius minorem, eandem proportionem, quam rectangulum f g, x d ad ipsum f e d. Quare & maior portio sphæroidis ad minorem, eam habet, quam excessus, quo rectangulum f g, x d excedit rectangulum f e d ad ipsum f e d. rectangulum autem f g, x d ipsum f e d excedit rectangulo x d, e g, & rectangulo f e x. Habet ergo maior sphæroidis portio ad minorem, proportionem eam, quam id, quod est æquale utrisque, & rectangulo x d, e g,



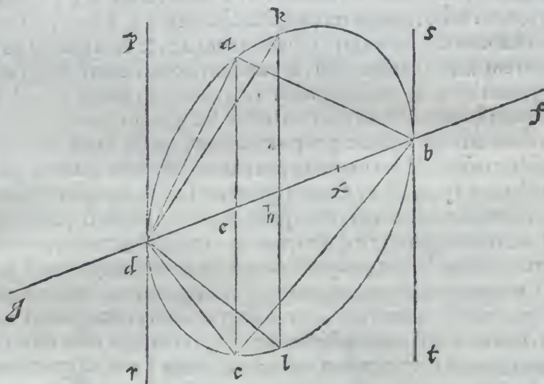

A B C D E F G H I

& rectangulo f e x ad ipsum f e d rectangulum, minor autem portio sphæroidis ad conum basim habentem eandem ipsi, & eundem axem, proportionem habet eam,
K quam rectangulum f e d ad rectangulum b e d. habet enim eam, quam f e ad b e:
L & conus, qui est in minori portione ad conum, qui in maiori eam habet, quam rectangulum b e d ad quadratum b e; nam coni altitudinum proportionem habent, cum in eadem sint basi. Quare maior portio sphæroidis ad conum in ipsa descriptũ, eam habet proportionem, quam, quod est æquale utrisque; & rectangulo x d, e g; & rectangulo f e x, ad quadratum b e. hæc autem eadem est illi, quam habet e g ad
M e d; quoniam rectangulum x d, e g ad rectangulum x d e eam habet, quam e g ad e
N d. & rectangulum f e x ad rectangulum f e h eam, quam e g ad e d; habet enim x e ad h e proportionem eandem, quam e g ad e d; propterea quòd proportionales sunt x d, h d, d e: & h d æqualis est ipsi g d. Quod igitur est æquale utrisque; rectangulo scilicet x d, e g & rectangulo f e x ad id, quod utrisque æquale; rectangulo x d e: & rectangulo f e h, eandem habet proportionem, quam e g ad e d. At quadra-
O tum b e æquale est utrisque; & rectangulo x d e, & rectangulo f e h; quoniam qua-
P dratum b h est æquale rectangulo x d e: & excessus, quo quadratum b e excedit quadratum b h est æqualis rectangulo f e h; quòd b h, b f sunt æquales. Manifestum est igitur maiorem sphæroidis portionem ad conum, qui basim habet portioni eandem, & eundem axem, eam proportionem habere, quam e g ad e d.

## PROPOSITIO XXXIIII.

SI sphæroides secetur plano neque erecto super axem, neque per centrum ducto: maior portio ipsius ad coni portionem basim habentem eandem ipsi, & eundem axem, eam proportionem habebit, quam utraque linea; & æqualis dimidiæ eius, quæ portionum factarum uertices coniungit; & axi minoris portionis ad axem minoris portionis.

SECETVR sphæroides plano, ut dictum est: secto autem ipso altero plano per axem, erecto super planum secans, figuræ quidem sectio sit a b c d acutianguli coni sectio: plani uero secantis figuram sit c a recta linea. Ducantur p r, s t æquidistantes ipsi a c, quæ contingant acutianguli coni sectionem in b d punctis: & attollantur ab ipsis plana æquidistantia plano secundum a c. continent hæc sphæroides in b d: atque erunt b d uertices portionũ. Itaque ducatur recta linea uertices portionum factarum coniungens b d, quæ per centrum transibit: &




sit h centrum: portio autem maior dimidio sphæroide sit, cuius uertex b: & apponatur d g æqualis d h: & b f eidem æqualis. Ostendendum est, portionem sphæroidis

dis maiorem ad coni portionem basim habentis eandem ipsi, & eundem axem, eam proportionem habere, quam e g ad e d. secetur enim sphæroides plano per cẽtrũ, æquidistanti plano secundum a c: & describatur in dimidio sphæroidis coni portio, uerticem habens punctum d: & quam proportionem habet d h ad e d, eandem habeat x d ad h d. similiter iis, quæ superius tradita sunt, ostendetur, & portionem coni descriptam in dimidio sphæroidis ad coni portionem in minori sphæroidis portione descriptam, eandem proportionem habere, quam rectangulum x d, b h ad rectangulum b e d; & portionem coni descriptam in minori sphæroidis portione ad portionem, in qua est descripta, eandem habere, quam rectangulum b e d ad rectangulum f e d. Habebit igitur coni portio in dimidio sphæroide descripta ad minorem portionem sphæroidis, eam proportiouem, quam rectangulum x d, b h ad ipsum f e d. Quare totum sphæroides ad portionem coni in dimidio sphæroide descritam, eam proportionem habebit, quam rectangulum f g, x d ad rectangulum b h, x d; utrunque enim utriusque quadruplum est. dicta autem coni portio ad portionem sphæroidis minorem, eandem proportionem habet, quam rectangulum, x d, b h ad rectangulum f e d, ergo totum sphæroides ad minorem ipsius portionem, eandem habebit, quam rectangulum f g, x d ad ipsum f e d rectangulum. Sed maior portio ad minorem habet eandem, quam excessus, quo rectangulum f g, x d excedit rectangulum f e d, ad rectangulum f e d: & portio minor ad coni portionem in ipsa descriptam, eandem habet, quam rectangulum f e d ad b e d rectangulum; demonstratum est enim habere eandem, quam f e ad b e. portio autem coni in minori portione descripta ad coni portionem descriptam in maiore, eandem proportionem habet, quam rectangulum b e d ad quadratum b e; portiones enim conorum dictæ, quoniam in eadem sunt basi, eam, quæ est altitudinum, proportionem habent. at uero altitudines habent eam, quam d e ad e b. Quare & maior portio sphæroidis ad coni portionem in ipsam descriptam, eandem proportionem habet, quam excessus, quo rectangulum g f, x d excedit rectangulum f e d, ad quadratum b e. hæc autem similiter demonstrabitur eadem illi, quam habet e g ad e d.

# ARCHIMEDIS

## LIBER DE ARENAE NVMERO.



RBITRANTVR nonnulli rex Gelon, arenæ numerum infinitum esse. dico autem non solum eius, quæ est circa Syracusas, & reliquam Siciliam, sed etiam quæ in omni regione habitabili, pariter atque inhabitabili continetur. Sunt præterea alii, qui non illum quidem infinitum putent; sed nullum dari denominatum numerum posse credant, qui illius multitudinem exuperet. Itaque eos, qui ita opinantur, si eiusmodi arenæ aceruum animo comprehenderēt, cuiusmodi esset, si uniuersa terra repleto in ea mari, & cauitatibus omnibus, altissimorum montium uertices exæquaret; atque huius ipsius rursus alterum multiplicem excogitarent, minime dubium est, existimaturos illius multitudinem numeros longe omnes, multumq; superare. Ego uero id ostendere conabor demonstrationibus geometricis, quas tu ipse assequeris; eorum uidelicet numerorum, qui à nobis expressi, traditiq; sunt in iis, quæ ad Zeuxippum scripsimus, nonnullos non solum arenæ multitudinem superare, quæ terræ undique repletæ, ut diximus, æqualis esset: sed etiam quæ ipsi mundo parem haberet magnitudinem. non enim ignoras mundum à compluribus Astrologis appellari sphæram, cuius centrum quidem est terræ centrum, semidiameter autem est æqualis lineæ inter centrum solis, & terræ centrum interiectæ. Hæc igitur in iis, quæ ab Astrologis scripta sunt, redarguens Aristarchus Samius positiones quasdam edidit, ex quibus sequitur, Mundum proxime dicti mundi multiplicem esse. ponit enim stellas inerrantes, atque solem immobiles permanere: terram ipsam circumferri circa solem, secundum circumferentiam circuli, qui est in medio cursu constitutus: sphæram autem inerrantium stellarum circa idem cētrum cum sole sitam, tanta esse magnitudine, ut circulus, secundum quem ponit terram circumferri, eam habeat proportionem ad distantiam stellarum inerrantium, quam centrum sphæræ habet ad eius superficiem. Id uero manifesto constat fieri non posse. Quoniam enim sphæræ centrum nullam habet magnitudinem: neque

profecto

profecto ullam habere proportionem ad ſphæræ ſuperficiem exiſti-
mandum eſt. Quare credibile eſt Ariſtarchum ita intellexiſſe.
Quoniam terram ueluti circa mundi centrum poſitam opinamur:
quam proportionem habet terra ad mundum à nobis dictum, ean-
dem habere ſphæram, in qua circulus eſt, ſecundum quem terram
ponit circumferri, ad ſphæram ſtellarum inerrantium. nam demon
ſtrationes eorum, quæ apparent, tanquam ſi hoc ita eſſet poſitum,
accommodat: & maxime uidetur magnitudinem ſphæræ, in qua ter
ram moueri facit, ponere ei, qui à nobis dicitur, mundo æqualem.
Itaque dicimus, ſi ex arena fiat ſphæra tanta magnitudine, quantam
ponit Ariſtarchus eſſe ſtellarum inerrantium: & eo pacto ex iis, quæ
in principio oſtenduntur, numerorum denominationibus, quaſdam
inueniri, quæ arenæ illius multitudinem exuperent; his uidelicet po
ſitis. Primum quidem terræ ambitum eſſe ueluti tercentum myria-
dum ſtadiorum, & non maiorem. nam cum ſecundum eos, qui hoc
demonſtrare aggreſsi ſunt; quibus tu ipſe aſſenties, ſit ueluti trigin-
ta myriadum ſtadiorum: ego exuperans pono terræ magnitudinem A
ueluti decuplam eius, quam ſuperiores opinati ſunt: & ambitum e-
ius eſſe trecentum myriadum ſtadiorum, & non maiorem. Deinde
diametrum terræ maiorem eſſe diametro lunæ: & diametrum ſolis
maiorem diametro terræ, ſimiliter eadem ſumens, quæ complures
ſuperiorum aſtrologorum. Poſtremo ſolis diametrum trigintuplam
eſſe diametri lunæ, & non maiorem. cum enim ex ſuperioribus aſtro B
logis Eudoxus quidem ueluti nonuplam affirmarit; Phidias Acupa
tris ueluti duodecuplam; Ariſtarchus autem conatus ſit oſtendere
diametrum ſolis maiorem eſſe, quàm duodeuigintuplam diametri
lunæ, & minorem, quàm uigintuplam eiuſdem: ego ſuperans &
hunc, ut propoſitum ſine controuerſia ſit demonſtratum, pono dia-
metrum ſolis, ut diximus, trigintuplam diametri lunæ, & non maio
rem. Præterea diametrum ſolis maiorem eſſe latere figuræ mille an-
gulorum, in maximo mundi circulo deſcriptæ. hoc autem pono, cũ
dicat Ariſtarchus ſolem ueluti ſeptingenteſimam, ac uigeſimam par-
tem circuli ſignorum apparere. Itaque hoc pacto conſiderans cona
tus ſum per inſtrumenta ſumere angulum, cui ſol accommodatur,
uerticem habentem in uiſu. ſimilem enim perfecte ſumere haud faci
le eſt; quòd neque uiſus, neque manus, neque inſtrumenta, per
quæ ſumitur, ſatis idonea ſunt ad id, quod perfectum, abſolutumq;
eſt oſtendendum. ſed de his uerba facere in præſentia opportunum
non eſt; præſertim cum ea ſæpius per ſe ſe manifeſte pateant. Ego ſa

N 2 tis



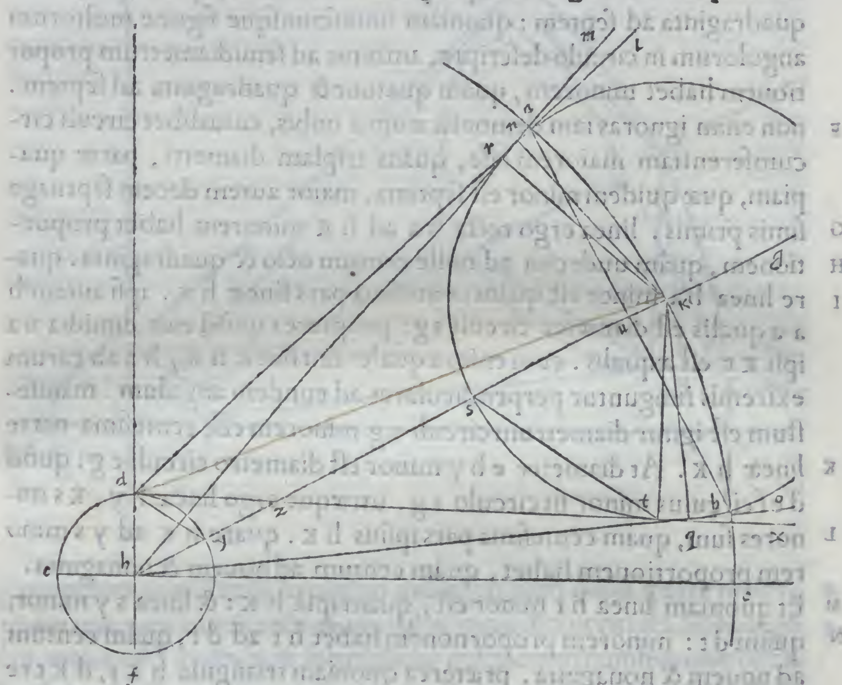
tis habeo ad propositi demonstrationem angulum sumere, qui minor sit angulo, cui sol accommodatur, uerticem habente in uisu: & rursus alterum sumere, qui non sit minor eodem angulo, uerticem similiter habente in uisu. Posita igitur longa regula super planum erectum in loco, unde sol exoriens conspiciatur, & cylindro paruo, tornatoq; super regulam erecto, statim post solis ortum, deinde ipso ad horizontem accedente, ita ut uideri possit, conuertatur regula ad solem: & uisus in extremo regulæ constituatur: cylindrus autem inter solem, & uisum intermedius solem abscondat: mox separato cylindro à uisu, ubi primum incipiat ex utraque eius parte solis minimum quippiam apparere, statuatur illic cylindrus. siquidem igitur similiter contingeret, uisum ab uno puncto inspicere, rectis lineis ductis ab extremo regulæ, in quo uisus fuerat constitutus, quæ cylindrum tangerent, angulus dictis lineis contentus minor esset angulo, cui sol accommodatur, uerticem habente in uisu: propterea quòd solis quippiam ex utraque cylindri parte conspiciatur.

A Quoniam autem uisus non ab uno puncto uidet, sed à magnitudine quadam: sumatur magnitudo rotunda non minor uisu: atque ea in extremo regulæ posita, ubi uisus constitutus fuerat, ductisq; lineis rectis magnitudinem contingentibus, & cylindrum, angulus dictis lineis comprehensus minor erit angulo, cui sol accommodatur uerticem habente ad uisum. Magnitudo autem non minor uisu hoc pacto inuenietur. sumantur duo cylindruli tenues, æquali inter se ma-

B gnitudine; unus albus, alter non albus. & apponantur ad uisum, ita ut albus remotior sit, non albus quàm proximus uisui, ut faciem attingat. Cum igitur sumpti cylindruli uisu subtiliores sint; siquidem multo subtiliores, qui proximus est uisui præteritur, & conspicitur albus totus: sin minus, partes quædam albi uidentur ex utraque parte eius, qui ad uisum admotus fuerit: itaque sumptis huiusmodi cylindris, & ita dispositis, ut alter sua crassitudine alterum uisui abscondat, & non ampliori loco, tanta magnitudo, quanta est crassitudo cylindrorum hoc facientium, plane quodammodo non est minor uisu. Angulus autem non minor eo, cui sol accommodatur, uerticem habente ad uisum, hoc modo sumitur. remoto in regula cylindro à uisu, adeo ut abscondat totum solem, & ductis lineis rectis ab extremo regulæ, in quo uisus constituitur, cylindrum ipsum tangentibus, angulus dictis lineis contentus non minor erit angulo, cui sol accommodatur uerticem habente ad uisum. His igitur angulis ad hunc modum sumptis, dimenso angulo recto; eorum maior quidem

minor

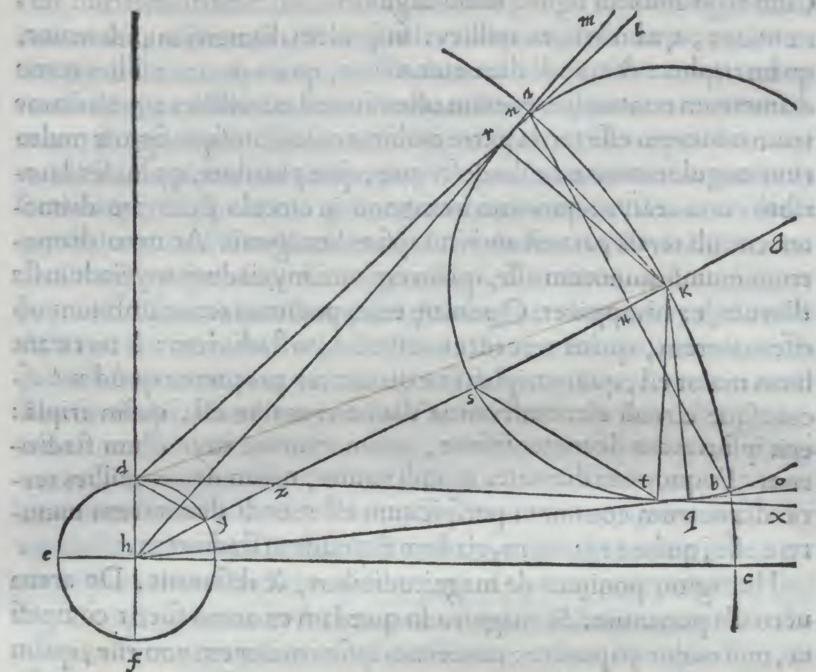
minor erit, quàm una pars anguli recti in centum quatuor & ſexaginta partes diuiſi; minor uero maior, quàm una pars anguli recti diuiſi in partes ducentas. Quare angulus, cui ſol accommodatur uerticem habens ad uiſum minor erit, quàm una pars anguli recti diuiſi in centum quatuor & ſexaginta partes; & maior, quàm una pars eiuſdem anguli diuiſi in partes ducentas. Ex quibus ſequitur, diametrum ſolis maiorem eſſe latere figuræ mille angulorum, quæ in maximo mundi circulo ſit deſcripta. Intelligatur enim planum




ductum per terræ centrum, & per uiſum, cum paulo ſupra horizontem ſol fuerit conſtitutus, quod ſecet mundum quidem ſecundum circulum a b c; terram uero ſecundum d e f; & ſolem ſecundum ſ g circulum: ſitq; terræ centrum h: centrum ſolis K: & uiſus d: & ducantur rectæ lineæ, quæ tangant circulum ſ g; à puncto quidem d ipſæ d l, d x, tangentes in n t; à puncto autem h ipſæ h m, h o tangentes in q r: & circulum a b c ſecent lineæ h m, h o in a b. linea C
igitur h K maior eſt, quàm d K; quoniam ſol ponitur ſupra horizontem eſſe: & idcirco angulus l d x maior eſt angulo m h o. Sed an- D
gulus l d x maior eſt, quàm ducenteſima pars anguli recti; minor uero

uero, quàm una pars eiusdem anguli in centum quatuor & sexaginta
partes diuisi; quòd is angulus æqualis sit angulo, cui sol accommo-
* datur uerticem habenti ad uisum. quare angulus m h o minor est,
quàm una pars anguli recti diuisi in centum quatuor & sexaginta par
E tes. linea uero ab recta minor est ea, quæ subtenditur uni portioni
circumferentiæ circuli a b c, in sexcentas sex & quinquaginta partes
diuisæ: & ambitus dictæ figuræ multorum angulorum ad semidiame
trum circuli a b c minorem proportionem habet, quàm quatuor &
quadraginta ad septem: quoniam uniuscuiusque figuræ multorum
angulorum in circulo descriptæ, ambitus ad semidiametrum propor
tionem habet minorem, quàm quatuor & quadraginta ad septem.
F non enim ignoras iam demonstratum à nobis, cuiuslibet circuli cir-
cumferentiam maiorem esse, quàm triplam diametri, parte qua-
piam, quæ quidem minor est septima, maior autem decem septuage
G simis primis. linea ergo recta b a ad h K minorem habet propor-
H tionem, quàm undecim ad mille centum octo & quadraginta. qua-
I re linea b a minor est quàm centesima pars lineæ h K. ipsi autem b
a æqualis est diameter circuli s g: propterea quòd eius dimidia u a
ipsi K r est æqualis. cum enim æquales sint lineæ h K, h a ab earum
extremis iunguntur perpendiculares ad eundem angulum. manife-
stum est igitur diametrum circuli s g minorem esse centesima parte
K lineæ h K. At diameter e h y minor est diametro circuli e g; quòd
d e f circulus minor sit circulo s g. utræque ergo lineæ h y, K s mi-
L nores sunt, quàm centesima pars ipsius h K. quare h K ad y s mino
rem proportionem habet, quàm centum ad nouem & nonaginta.
M Et quoniam linea h r minor est, quàm ipsa h K: & linea s y minor,
N quàm d t: minorem proportionem habet h r ad d t, quàm centum
ad nouem & nonaginta. præterea quoniam triangula h K r, d K t re
ctangula sunt: & latera quidem K r, K t æqualia habent; ipsa autem
h r, d t inæqualia: & maior angulus t d K ad angulum r h K maio-
rem proportionem habet, quàm h K ad d K; minorem uero quàm
O h r ad d t. si enim duo triangula rectangula altera duorum laterum,
quæ sunt circa angulum rectum æqualia habeant, altera autem inæ-
qualia: maior angulus eorum, qui lateribus inæqualibus contine-
tur, ad minorem, maiorem quidem proportionem habet, quàm ma
ior linea angulo recto subtensa ad minorem; minorem uero, quàm
maior earum, quæ ad angulum rectum consistunt, habeat ad mino-
P rem. Quare angulus l d x ad angulum m h o minorem proportio-
nem habet, quàm h r ad d t: quæ quidem minorem habet, quam
centum

centum ad nouem & nonaginta. angulus igitur l d x ad m h o angulum minorem proportionem habet, quàm centum ad nouem & nonaginta. & quoniam angulus l d x maior eſt, quàm ducenteſima Q pars anguli recti: erit angulus m h o maior, quàm nouem & nona-




ginta partes anguli recti in uiginti millia partium diuiſi. quare maior, R quàm una pars anguli recti diuiſi in ducentas & tres partes. linea ergo S b a maior eſt, quàm quæ ſubtenditur uni parti circumferentiæ circuli a b c, diuiſæ in partes octingentas & duodecim. ſed ipſi b a ſolis diameter eſt æqualis. manifeſtum eſt igitur diametrum ſolis maiorem eſſe latere figuræ, quæ mille angulis conſtet. Itaque his poſitis, oſtenduntur & illa: uidelicet diametrum mundi continere minus, quàm decies millies diametrum terræ: & inſuper diametrum mundi minorem eſſe, quàm centum myriadum myriadum ſtadiorum. Quoniam enim poſitum eſt, diametrum ſolis non maiorem eſſe, quàm trigintuplam diametri lunæ: diametrum uero terræ diametro lunæ maiorem: conſtat diametrum ſolis minorem eſſe, quàm trigintuplam diametri terræ. Rurſus quoniam oſtenſum eſt diametrum ſolis maiorem eſſe latere figuræ mille angulorum, quæ in maximo mundi

mundi circulo sit descripta: patet ambitum dictæ figuræ minus, quàm millies diametrum solis continere. diameter autem solis minor est, quàm trigintupla diametri terræ. Quare ambitus dictæ figuræ mille angulorum minus, quàm tricies millies diametrum terræ continet. Cum ergo ambitus figuræ mille angulorũ contineat diametrum terræ minus, quàm tricies millies: sitq; idem diametri mundi maior, quàm triplus: & mundi diameter minus, quàm decies millies terræ

T diametrum continebit. et enim ostensum est cuiuslibet circuli diametrum minorem esse tertia parte ambitus uniuscuiusque figuræ multorum angulorum in circulo descriptæ, quæ pluribus, quàm sex lateribus contineatur: quoniam hexagono in circulo descripto diameter circuli tertia pars est ambitus ipsius hexagoni. At uero diametrum mundi minorem esse, quàm centum myriadum myriadum stadiorum, ex his apparet. Quoniam enim ponimus terræ ambitum nõ esse maiorem, quàm tercentum myriadum stadiorum: & terræ ambitus maior est, quàm triplus suæ diametri; propterea quòd uniuscuiusque circuli circumferentia diametri maior est, quàm tripla: erit ipsius terræ diameter minor, quàm centum myriadum stadiorum. Et quoniam diameter mundi minus, quàm decies millies terræ diametrum continet: perspicuum est mundi diametrum minorem esse, quàm centum myriadum myriadum stadiorum.

Hæc igitur ponimus de magnitudinibus, & distantiis. De arena uero illa ponantur. Si magnitudo quædam ex arena fuerit composita, non maior papauere: numerum ipsius maiorem non esse, quàm denum millium: & diametrum papaueris non esse maiorem quadragesima parte digiti. hoc autem pono, scrutatus in hunc modum. in regula plana posita fuerunt papauera in eadem recta linea, quæ se se inuicem tangerent: & occuparunt triginta quinque papauera ampliorem locum, quàm sit digiti longitudo. ego uero diametrum papaueris minorem pono, ut sit quadragesima pars digiti; & non minor, uolens etiam ex hoc apertissime, & planissime propositum demonstrare.

V Quæ igitur ponimus hæc sunt. sed iam utile esse arbitror de numerorum denominationibus dicere, ut ne decipiantur illi; qui in librum à me ad Zeuxippum scriptũ non inciderunt; propterea quòd de iis ipsis nihil in hoc libro habetur. Contingit autem numeris imposita esse nomina ab ipsis myriadibus, in quibus eos optime nouimus, numerum myriadum ad myriadas ipsas referentes. Itaque qui proxime dicti sunt numeri in decies mille myriadas, primi uocentur: primorum autem numerorum decies mille myriades, unitas

dicatur

dicatur eorum, qui ſecundi ſunt: & ſecundorum numerorum unitates, & ex unitatibus denarii, & centenarii, & millenarii, & myriades, erunt denum millium myriadum. Rurſus & decies mille myriades ſecundorum numerorum unitas uocetur tertiorum numerorum: & tertiorum numerorum unitates, & ex unitatibus denarii, centenarii, millenarii, & myriades, denum millium myriadum, denum millium myriadum. Eodem modo & tertiorum numerorum decies mille myriades unitas dicatur quartorum numerorum: & quartorum item numerorum decies mille myriades unitas dicatur quintorum: & ſemper ita procedentes numeri nomina ſortiantur: eritq; unitas quintorum numerorum, denum millium myriadum, denum millium myriadum, denum millium myriadum, decies mille myriades. Ex iis igitur qui dicti ſunt, numeri ſatis erunt noti. licet autem & amplius producere. Sint enim, qui modo dicti ſunt numeri, primæ periodi uocati: extremus autem numerus periodi unitas uocetur ſecundæ periodi ſecundorum numerorum. Rurſus & decies mille myriades ſecundæ periodi ſecundorum numerorum, hoc eſt huius ſecundæ periodi extremus numerus unitas uocetur tertii periodi tertiorum numerorum: & ſemper ſic procedentes numeri à periodis nomina ſortiantur: eruntq; denum milliũ myriadum decies mille myriades. Rurſus & extremus numerus tertiæ periodi unitas uocetur quartæ periodi quartorum numerorum: & ita ſemper procedentibus, erunt denum millium myriadum, denum millium myriadum, decies mille myriades. His igitur hoc modo denominatis, ſi ſint numeri ab unitate proportionales conſtituti: qui autem iuxta unitatem denarius ſit: octo primi una cum unitate, eorum, qui primi dicuntur, numerorum erunt: alii octo ſequentes eorum, qui ſecundi dicuntur: & reliqui eodem modo denominabuntur ſecundum diſtantiam à prima numerorum octade. primæ igitur octadis octauus numerus eſt mille myriades: ſecundæ octadis primus, quoniam decuplus eſt eius, qui antecedit, decies mille myriades: hic autem eſt unitas ſecundorum numerorum: octauus ſecundæ octadis numerus eſt mille myriades ſecundorum numerorũ. Rurſus & tertiæ octadis primus, quoniam eius, qui antecedit decuplus eſt, decies mille myriades erit ſecundorum numerorum: & eſt unitas tertiorum numerorum. conſtat igitur plures eſſe octades, ut dictum eſt. ſed & illud noſſe oportet. Si numeris ab unitate proportionalibus exiſtentibus, aliqui ex eadem proportionalitate ſe ſe inuicem multiplicauerint: factus inde numerus ex eadẽ erit proportio-

O nalitate,

nalitate, tantum distans à maiore multiplicantium, quantum minor ab unitate distat, secundum proportionalitatis ordinem: ab unitate uero distabit uno minus, quàm sit numerus ex utrisque compositus, secundum quos multiplicantes se se ab unitate distiterint. Sint numeri quotlibet proportionales ab unitate a b c d e f g h i K l: & sit a unitas: & d multiplicans ipsum h producat q: sumatur autem ex eadem proportionalitate l tantum distans ab h, quantum d ab unitate distat. ostendendum est, q æqualem esse ipsi l. Quoniam enim proportionalibus existentibus numeris, d tantum distat ab a, quantum l ab h: eandem proportionem habet d ad a, quàm l ad h. est autem d secundum se ipsum multiplex ipsius a. & l igitur multiplex est ipsius h secundum d. quare æqualis est l ipsi q. patet igitur factum numerum ex eadem proportionalitate esse: atque à maiore multiplicantium tantum distare, quantum minor ab unitate distat. patet etiam, eundem ipsum distare ab unitate uno minus, quàm sit numerus ex utrisque compositus, quibus multiplicantes se se ab unitate distant. nam a b c d e f g h tot sunt, quot h distat ab unitate. sed i K l uno sunt minores, quàm quibus d ab eadem distat: etenim una cum h totidem erunt.

His igitur partim quidem positis, partim uero demonstratis, quòd iam propositum est, ostendemus. Quoniam enim ponitur diameter papaueris non minor quadragesima parte digiti: perspicuum est, sphæram, quæ diametrum digito æqualem habeat, non maiorem esse, quàm ut contineat papauerum myriadas sex & quatuor millia. nam sphæræ, quæ diametrum habet quadragesimam partem digiti,
z multiplex est secundum dictum numerum; cum ostensum sit sphæras adinuicem proportionem habere triplam eius, quæ est suorum diametrorum. Et quoniam positum est, numerum arenæ ad magnitudinem papaueris non esse maiorem decem millibus: constat, si sphæra, quæ diametrum habeat digito æqualem, arena impleatur, non maiorem futurum arenæ numerum, quàm myriades sex, & quatuor millia myriadum; qui numerus est unitates sex secundorum numerorum, & primorum quater mille myriades. minor igitur est, quàm unitates decem secundorum numerorum: Sphæra autem diametrum habens digitorum centum, sphæræ, quæ diametrum digito æqualem habeat multiplex est centum myriadibus; propterea quòd sphæræ inter se triplam eius, quæ est diametrorũ, proportionem habent. Si igitur ex arena fiat sphæra tanta magnitudine, quanta est, quæ diametrum habet centum digitorum: numerus arenæ

minor erit, quàm qui producitur, decem unitatibus secundorum numerorum in centum myriades ductis. sed decem unitates secundorũ numerorũ decimus est proportionalis numerus ab unitate in decuplis terminis proportionalibus: & centum myriades ab unitate septimus est ex eadem proportionalitate. quare qui producitur numerus erit ab unitate sextus decimus. ostensum est enim eum uno minus distare ab unitate, quàm sit numerus compositus ex utrisque iis, quibus multiplicantes se se ab unitate distant. Ipsorum autem sexdecim, octo primi una cum unitate primorum numerorum sunt: alii octo sequentes secundorum: & eorum ultimus est mille myriades secundorum numerorum. constat igitur arenæ numerum, quæ magnitudinem habeat æqualem sphæræ centum digitorum diametrum habenti minorem esse mille myriadibus secundorum numerorum. Rursus & sphæra decies mille digitorum diametrum habens, sphæræ habentis diametrum digitorum centum multiplex est centum myriadibus. ergo si ex arena fiat sphæra diametrum habens decies mille digitorum: erit eius numerus minor, quàm qui fit mille myriadibus secundorum numerorum in centum myriades ductis. Et quoniam mille myriades secundorum numerorum sextus decimus est proportionalis ab unitate: & centum myriades ab unitate septimus est ex eadem proportionalitate: factus numerus erit eiusdem ordinis uigesimus secundus. Horum autem duo & uiginti numerorum, primi octo una cum unitate primorum numerorum sunt: octo sequentis secundorum: reliqui tertiorum, quorum extremus est decem myriades tertiorum numerorum: ex quo manifestum est, numerum arenæ, quæ æqualis sit sphæræ decies mille digitorum diametrum habenti minorem esse, quàm tertiorum numerorum myriades decem. Et quoniam sphæra, quæ diametrum habet stadio æqualem minor est sphæra habente diametrum decies mille digitorum: patet arenæ numerum, cuius magnitudo sit æqualis sphæræ diametrum stadio æqualem habente, minorem esse decem myriadibus tertiorum numerorum. Rursus sphæra centum stadiorum diametrũ habens sphæræ habentis diametrum stadii unius, multiplex est myriadibus centum. Si igitur ex arena fiat sphæra æqualis ei, quæ diametrum habet centum stadiorum: minor erit arenæ numerus, quã qui fit decem myriadibus tertiorum numerorum in centum myriades multiplicatis. quia uero tertiorum numerorum decem myriades uigesimus secundus est ab unitate proportionalis: & centum myriades ab unitate septimus est ex eodem proportionis ordine: qui fit nu-

merus similiter erit ex eodem uigesimus octauus ab unitate. sed horum octo & uiginti, primi quidem octo cum unitate sunt primorum numerorum: octo, qui sequuntur secundorum: alii octo tertiorum: reliqui quatuor quartorum: estque eorum ultimus quartorum numerorum milleunitates. manifestum est igitur numerum arenæ, quæ magnitudinem obtinet æqualem sphæræ centum stadiorum diametrum habenti, minorem esse mille unitatibus quartorum numerorum. Rursus sphæra diametrum habens denum millium stadiorum, sphæræ habentis diametrum centum stadiorum, multiplex est centum myriadibus. Quòd si fiat ex arena sphæra tanta magnitudine, quanta est, quæ diametrum habet denum millium stadiorum: minor erit eius arenæ numerus, quàm qui producitur multiplicatis mille unitatibus quartorum numerorum in centum myriades: & cum mille unitates quartorum numerorum, uigesimus octauus sit numerus ab unitate proportionalis: centum uero myriades eius proportionalitatis septimus: erit is, qui producitur ex eodem ordine trigesimus quartus. Itaque horum quatuor & triginta, octo quidem primi cum unitate primorum numerorum sunt: octo qui sequuntur secundorum: alii octo tertiorum: deinde alii octo quartorum: reliqui uero duo quintorum: & eorum extremus est decem unitates quintorum numerorum: constat igitur numerum arenæ, cuius magnitudo sit æqualis sphæræ denum millium stadiorum diametrum habenti, minorem esse, quàm quintorum numerorum decem unitates. Rursus sphæra diametrum habens centum myriadum stadiorum, sphæræ habentis diametrum stadiorum denum millium, multiplex est centum myriadibus. & idcirco si ex arena fiat sphæra magnitudinem habens æqualem sphæræ centum myriadum stadiorum diametrum habenti: numerus eius minor erit, quàm qui fit decem unitatibus quintorum numerorum in centum myriades multiplicatis. Et cum decem unitates quintorum numerorum ab unitate trigesimus quartus sit proportionalis: & centum myriades sit eiusdem ordinis septimus: factus numerus erit quadragesimus ab unitate. Horum uero quadraginta, primi octo cum unitate sunt primorum numerorum: qui hos sequuntur octo secundorum: alii octo tertiorum: deinde octo alii quartorum: postremo reliqui octo quintorum, quorum ultimus est mille myriades quintorum numerorum. ergo manifestum est arenæ numerum, quæ magnitudinem habeat æqualem sphæræ centum myriadum stadiorum diametrum habenti, minorem esse mille myriadi-

bus quintorum numerorum. ſphæra autem diametrum habens decies mille myriadum ſtadiorum, ſphæræ diametrum centum myriadum ſtadiorum habentis multiplex eſt centum myriadibus. Si igitur ex arena fiat ſphæra, cuius magnitudo ſit æqualis ſphæræ habenti diametrum ſtadiorum decies mille myriadum: minor erit arenæ numerus, quàm qui producitur ex multiplicatione mille myriadum quintorum numerorum in centum myriades. Et quia quintorum numerorum mille myriades, quadrageſimus numerus eſt ab unitate proportionalis: centum uero myriades ſeptimus eſt ex eadem proportionalitate: qui producitur numerus erit ab unitate quadrageſimus ſextus. Horum autem ſex & quadraginta primi quidem octo cum unitate primorum numerorum ſunt: ſecundi octo: ſecundorum: tertii tertiorum: quarti quartorum: quinti quintorum: reliqui ſex ſextorum, quorum ultimus eſt decem myriades ſextorum numerorum. perſpicuum ergo eſt numerum arenæ magnitudinem habentis ſphæræ æqualem, cuius diameter eſt decies mille myriadum ſtadiorum, minorem eſſe, quàm ſextorum numerorum myriades decem. Rurſus ſphæra diametrum habens centum myriadum myriadum ſtadiorum, ſphæræ habentis diametrum decies mille myriadum ſtadiorum multiplex eſt centum myriadibus. quare ſi fiat ex arena ſphæra æqualis ſphæræ, quæ habeat diametrum centum myriadum myriadum ſtadiorum: eius arenæ numerus minor erit, quàm qui fit ex multiplicatione decem myriadum ſextorum numerorum in myriades centum. Et quoniam ſextorum numerorum decem myriades, numerus proportionalis eſt ab unitate quadrageſimus ſextus: & centum myriades ſeptimus eſt ex eodem proportionis ordine: qui producitur numerus erit ab unitate quinquageſimus ſecundus. Ex his uero quinquaginta duobus, octo & quadraginta una cum unitate ſunt eorum, qui primi, ſecundi, tertii, quarti, quinti, & ſexti dicuntur: reliqui quatuor eorum, qui ſeptimi: & extremus eſt mille unitates ſeptimorum numerorum. unde conſtat numerum arenæ, quæ magnitudinem habeat æqualem ſphæræ centum myriadum myriadum ſtadiorum diametrum habenti, minorem eſſe mille unitatibus ſeptimorum numerorum. Itaque quoniam oſtenſa eſt mundi diameter minor eſſe, quàm centum myriadum myriadum ſtadiorum: erit numerus arenæ magnitudinem habentis mundo æqualem minor mille unitatibus ſeptimorum numerorum: oſtenſum eſt igitur nume

rum

rum arenæ, quæ magnitudine sit æqualis mundo à quamplurimis astrologis appellato, minorem esse, quàm septimorum numerorũ mille unitates. At uero arenæ numerum magnitudinem habentis æqualem sphæræ tantæ, quantam Aristarchus ponit stellarum inerrantium, minorem esse, quàm mille myriades octauorum numerorum, ostendetur hoc modo. Nam cum positum sit, terram ad mundum à nobis dictum eam habere proportionem, quàm habet dictus mundus ad sphæram stellarum inerrantium ab Aristarcho positam: & diametri sphærarum eandem inter se proportionem habent. mundi autem diameter, ut mõstratum est, minus quàm decies millies continet terræ diametrũ: & diameter stellarum inerrantium minus, quàm decies millies mundi diametrum continet. Et cum sphæræ ad inuicem proportionem habeant triplam eius, quæ est diametrorum: stellarum inerrantium sphæra, quam ponit Aristarchus, minus quàm decies millies decies mille myriades mundorum continebit. ostensum autem est numerum arenæ, quæ magnitudinem habeat æqualem mundo, minorem esse mille unitatibus septimorum numerorum. Si igitur ex arena fiat sphæra tanta magnitudine, quantam Aristarchus ponit esse stellarum inerrantiũ: eius numerus minor erit, quàm qui sit mille unitatibus septimorum numerorum in decies millies decies mille myriades ductis. Et quoniam septimorum numerorum mille unitates quinquagesimus secundus est proportionalis ab unitate: & decies millies decies mille myriades ab unitate tertius decimus est ex eodem ordine: patet factum numerum esse ab unitate sexagesimum quartum. hic autem est octauorum octauus; hoc est octauorum numerorum mille myriades. manifestum est igitur arenæ numerum, quæ magnitudinem obtineat æqualem sphæræ stellarum inerrantium ab Aristarcho positæ, minorem esse mille myriadibus octauorum numerorum. Hæc autem rex Gelon quamplurimis quidem, qui mathematicis instructi non sunt, non admodum credibilia fore arbitror: illis uero, qui ea didicerunt: & circa distantias, & magnitudines terræ, solis, lunæ, & mundi totius elaborarunt, credibilia prorsus esse propter demonstrationem. Quapropter & de his ipsis speculari aliquos non absurdum esse existimaui.

# COMMENTARII



apud Paulum Manutium, Aldi F.


AL
DVS



# COMMENTARII
## IN OPERA NON NVLLA ARCHIMEDIS.






VENETIIS,
apud Paulum Manutium, Aldi F.
M D LVIII.

# EVTOCII ASCALONITAE

Commentarius
in librum de circuli dimenſione
à Federico Commandino nuper in latinam
linguam conuerſus.

Eiuſdem Federici Commandini commentarii
in librum
de Circuli dimenſione.
Lineis ſpiralibus.
Quadratura paraboles.
Conoidibus, & ſphæroidibus.
Arenæ numero.

OCTAVIO FARNESIO,
PARMENSIVM, ET
PLACENTINORVM
DVCI.


VM me ſæpenumero, DVX PRAESTANTISSIME, hortatus ſis, ut in lucem proferrem commentarios quoſdam meos in Archimedem, quos mihi ipſi conſcripſeram: tua impulſus auctoritate, nullum amplius locum hortationibus tuis relinquere decreui; præſertim cum tu mathematicas diſciplinas optime calleas. nam, ut peritiſsimus es regendorum exercituum dux, ita nihil omittis eorum, quæ ad militares artes comprehendendas attinent. Hiero Syracuſanorum rex Archimedem maximo in honore ſemper habuit: eiq́; auctor fuit, ut geometriam à reliqua philoſophia ſeiungeret, & cum re militari coniungeret. Marcellus in Romanis imperatoribus princeps, cum uiuentem Archimedem pro dignitate ornare non potuiſſet, ea officia mortuo præſtitit, quæ tanti uiri merita poſtulabant. Ad te uero, Hieroni regi nobilitate generis, & Chriſtianæ uitæ innocentia facile antecellentem, Marcello autem nulla ratione inferiorem, ſpectat, hos meos in Archimedem commentarios, qui hortatu tuo æditi ſunt, in tuam etiam clientelam recipere, Commandinumq́; tuum, Archimedis ſtudioſiſsimum, in eorum, qui te unice colunt, numero reponere.

Federicus Commandinus.

# EVTOCII ASCALONITAE IN ARCHIMEDIS CIRCVLI DIMENSIONEM COMMENTARIVS.



CVM in Archimedis scriptis explicandis elaborauerim, quæ & faciliora essent, & minori consideratione indigerent: consequens uidetur esse, & instituto meo consentaneum, ut quæ ex illis maiorem diligentiam, atque operam desiderant, quantum in nobis erit, adiungamus ad ea, quæ prius in libros de sphæra, & cylindro elucubrauimus. Si quidem in ijs, quæ difficiliora sunt, & maiori studio indigent, operam in primis ponere debemus. Sit ergo deinceps propositus nobis libellus, qui inscriptus est, Circuli dimensio, in quo auctoris propositum ex ipsa inscriptione intueri possumus: uult enim ostendere, cui spatio rectilineo circulus sit æqualis; quæstionem scilicet à clarissimis ante ipsum philosophis pertractatam. nam constat hoc esse quæsitum illud, quod Hippocrates chius, & Anthiphon, cum diligenter inuestigassent, eos nobis paralogismos inuenerunt, quos probè nosse illos arbitror, qui geometricam Eudemi historiam, & Aristotelis libros propriam huiusce generis doctrinam complectentes euoluerint. Verumtamen liber hic, ut inquit Heraclides in Archimedis uita, multas affert ad usum uitæ commoditates: ostendit enim circuli circumferentiam diametri triplam, & insuper minorem, quàm sesquiseptimam, maiorem uero, quàm superdecies partientem septuagesimas primas. Hoc igitur, ut dicit, proximè est demonstratum: nam per quasdam spirales lineas inuenta est ab ipso recta linea datæ circuli circumferentiæ æqualis.

## IN PROPOSITIONEM I.

PRIMVM Theorema etiam ijs, qui aliquantulum in Mathematicis sunt exercitati, nihil habere quæstionis uidetur; cum Archimedis uerba manifeste exponantur, & conclusionem ipsam nulla re omissa ad propositionem referant. sed tamen uidetur Archimedes ad demonstrationem perperam usus re quapiam, quæ nondum sit demonstrata: exponens enim triangulum rectangulum, habeat, inquit, unum eorum laterum, quæ circa rectum angulum sunt, æquale semidiametro, alterum uero circumferentiæ æquale. At qui circumferentiæ circuli quomodo æqualem rectam lineam sumamus, neque ab ipso, neque ab alio quopiam demonstratum est. Verum illud scire oportet, nihil quod non conueniat ab Archimede scribi: nam circuli circumferentiam magnitudinem esse omnibus perspicuum est: atque, ut arbitror, ex earum numero, quæ ad unum duntaxat diuisibiles sunt, est autem & recta linea illius eiusdem speciei. & quanquam nondum appareat fieri posse, ut circumferentiæ circuli æqualem rectam lineam inueniamus: esse tamen natura rectam quandam ipsi æqualem à nullo unquam est dubitatum. Illud ergo, quod ab Archimede proponitur tale est, triangulum rectangulum habens latera, ut dictum est, æquale esse circulo. Quare propositum exponens minime à cusandus uidetur; quin potius admirabilis illis ipsis existimari debet, quòd ad magnitudinem quæsitorum manifestam, & facilem inuentionem adiunxerit. Vt autem dictum est, primum theorema nihil habet quæstionis, nam triangulum p o r maius esse, quàm dimidium figuræ a f o m: & simpliciter dato circulo posse figuram rectilineam circumscribi: ita ut portiones, quæ inter circuli circumferentias, & latera circumscriptæ figuræ interijciuntur, minores sint dato spatio; manifeste dictum est è nobis in ijs, quæ in primum librum de sphæra, & cylindro conscripsimus.

## IN PROPOSITIONEM III.

IN hoc theoremato continenter iubemur, numeri dati latus quadratum inuenire, sed hoc in numero non quadrato perfecte inueniri non potest. nam numerus in seipsum multiplicatus producit quendam numerum quadratum: numerus autem, & partes si in sese multiplicentur, non faciunt

*numerum integrum, sed & partes. Verum quemadmodum oporteat latus proximè producens datum numerum inuenire, dictum est ab Herone in metricis, dictum est & à Pappo, Theone, & compluribus alijs, qui magnam Claudij Ptolemæi compositionem explicarunt. Quare non est, quamobrem in hoc laboremus, cum liceat ijs, qui eiusmodi studio tenentur, ex illis sumere.*

A Et angulus f e c sit tertia pars recti.] *si enim hexagoni circumferentiam bifariam secantes, & eius dimidium sumentes, linea à centro ducta, iunxerimus ipsam e f: erit c e f angulus tertia pars recti: nam circumferentia ad e sumpta, cum sit dimidia circumferentiæ hexagoni, erit circuli pars duodecima. Vnde & angulus c e f ad centrum duodecima pars erit quatuor rectorum, & ob id, tertia unius recti.*

B Ergo linea e f ad f c eam proportionem habet, quam 306 ad 153.] *nam dupla est e f ipsius f c; quod ex hoc patet. si enim ipsam f c lineam ad m producentes, æqualemq; ipsi sumentes, iunxerimus à puncto e: constituetur ad m angulus, qui erit duæ tertiæ unius recti. est autem & angulus ad e duæ tertiæ recti: & pariter angulus ad f. æquilateri igitur trianguli dimidium est ipsum c e f. Quòd cum basis trianguli æquilateri, quæ est æqualis ipsi e f, bifariam secetur ad c: dupla erit e f ipsius c f.*

C Ipsa uero e c ad c f proportionem habet, quam 265 ad 153.] *Quoniam enim e f ponitur esse 306: si ipsa in seipsam multiplicetur: fient 93636. est autem c f 153. quadratum igitur ipsius erit 23409. et quoniam quadratum e f æquale est duobus quadratis e c, c f: si ab ipso e f quadrato, quòd est 93636 auferamus quadratum c f, hoc est 23409: relinquetur quadratum e c 70227, cuius latus 265, et adhuc pars minima, et insensibilis. deficit enim quadratum 265 ab exquisito quadrato unitatibus duabus. multiplicationis autem subijciuntur.*

| e f | f c | e c |
|---|---|---|
| 306 | 153 | 265 |
| 306 | 153 | 265 |
| 1836 | 459 | 1325 |
| 918 | 765 | 1590 |
| 93636 | 153 | 530 |
| 23409 | 23409 | 70225 |
| 70227 *cuius latus 265 proximè* | | |
| 70225 | | |
| 2 | | |

D Secetur angulus f e c bifariam ducta linea e g. ut igitur f e ad e c, ita est f g ad g c.] *per tertium Theorema sexti libri elementorum Euclidis, & componenti, ut utraque f e, e c ad e c, ita f c ad c g: et permutanti ut utraque f e, e c ad f c, ita e c ad c g. utraque autem f e, e c maior est, quàm 571. nanque f e ponitur 306, & e c 265, & adhuc pars quædam. quare maior est, quàm 571. ipsa uero f c est 153. utraque igitur f e, e c ad f c maiorem proportionem habet, quàm 571 ad 153. & idcirco e c ad c g maiorem habet, quàm 571 ad 153.*

E Quare e g ad c g eam potestate proportionem habet, quam 349450 ad 23409.] *hoc autem ita colligetur. quoniam enim ostensum est e c ad c g maiorem habere proportionem, quàm 571 ad 153: si quis ponat ipsam quidem e c esse 571, ipsam uero c g 153: erit quadratum e c 326041, & quadratum c g 23409. Quòd cum utraque sint æqualia quadrato e g: erit ipsum e g quadratum 349450, cuius latus 591 $\frac{1}{8}$ proximè: deficit enim quadratum 591 $\frac{1}{8}$ ab exquisito quadrato unitatibus 21 $\frac{15}{64}$. ergo e g ad g c potestate proportionem habet, quam 349450 ad 23409, longitudine uero, quam 591 $\frac{1}{8}$ proximè ad 153. multiplicationes autem subijciuntur.*

| e c | g c | e g |
|---|---|---|
| 571 | 153 | 591 $\frac{1}{8}$ |
| 571 | 153 | 591 $\frac{1}{8}$ |
| 571 | 459 | 349428 $\frac{49}{64}$ |
| 3997 | 765 | |
| 2855 | 153 | |
| 326041 | 23409 | |
| 23409 | | |
| 349450 *cuius latus 591 $\frac{1}{8}$ proximè* | | |
| 349428 $\frac{49}{64}$ | | |
| 21 $\frac{15}{64}$ | | |

Rursus angulus g e c bifariam secetur ipsa e h linea. eadem ratione e c ad c h maiorem proportionom habet, quàm 1162 $\frac{1}{8}$ ad 153.] *Fit enim propter bipartitionem anguli, ut g e ad e c, ita g h ad h c. & componenti, ut utraque g e, e c ad e c, ita g c ad c h. & permutanti, ut utraque g e, e c ad g c, ita e c ad c h. & est ipsa quidem e c 571, & adhuc pars quædam; ipsa autem e g 591 $\frac{1}{8}$. & pars quædam. quare maiora sunt, quàm 1162 $\frac{1}{8}$. & est g c 153. utraque igitur g e, e c ad g c maiorem habet proportionem, quàm 1162 $\frac{1}{8}$ ad 153.*

Quare h e, ad h c maiorem habet, quàm 1172 $\frac{1}{8}$ ad 153.] *Quoniam enim ostensa est e c ad c h maiorem proportionem habere, quàm 1162 $\frac{1}{8}$ ad 153: si quis ponat ipsas sic habere: erit quadratum e c 1350534 $\frac{33}{64}$; quadratum autem c h 23409. ergo quadratum e h, cum sit æquale quadratis e c, c h, erit 1373943 $\frac{33}{64}$; cuius latus 1172 $\frac{1}{8}$ proximè: deficit enim ab exquisito quadrato ipsius, unitatibus 66 $\frac{1}{2}$. multiplicationes autem subijciuntur.* G

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *e c* | 1162 $\frac{1}{8}$ | *h c* | 153 | *e h* | 1172 $\frac{1}{8}$ |
| | 1162 $\frac{1}{8}$ | | 153 | | 1172 $\frac{1}{8}$ |
| | 1350534 $\frac{33}{64}$ | | 23409 | | 1373877 $\frac{1}{64}$ |
| | 23409 | | | | 66 $\frac{1}{2}$ |
| | 1373943 $\frac{33}{64}$ | | *cuius latus* 1172 $\frac{1}{8}$ *proximè* | | 1373943 $\frac{33}{64}$ |

Secetur item h e c angulus bifariam ducta e k. habet e c ad c k proportionem maiorem, quàm 2334 $\frac{1}{4}$ ad 153.] *Rursus enim propter bipartitionem anguli h e c, est ut h e ad e c, ita h k ad c k: & componenti ut utraque h e, e c ad e c, ita h c ad c k: & permutanti ut utraque h e, e c ad h c, ita e c ad c k. Quoniam ergo ostensa est h e 1172 $\frac{1}{8}$, & adhuc pars quædam: utraque h e, e c maior est, quàm 2334 $\frac{1}{4}$. ponitur autem h c 153. utraque igitur h e, e c ad h c maiorem proportionem habet, quàm 2334 $\frac{1}{4}$ ad 153.* H

Ergo e k ad c k maiorem habet, quàm 2339 $\frac{1}{4}$ ad 153.] *Rursus quoniam ponitur e c 2334 $\frac{1}{4}$, ipsa autem c k 153: erit quadratum e c 5448723 $\frac{1}{16}$, & quadratum c k 23409; quibus quadratis æquale est quadratum k e. erit igitur k e quadratum 5472132 $\frac{1}{16}$; cuius latus 2339 $\frac{1}{4}$ proximè. deficit enim ab exquisito, unitatibus 41 $\frac{1}{2}$ multiplicationes autem subijciuntur.* I

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *e c* | 2334 $\frac{1}{4}$ | *c k* | 153 | *k e* | 2339 $\frac{1}{4}$ |
| | 2334 $\frac{1}{4}$ | | 153 | | 2339 $\frac{1}{4}$ |
| | 5448723 $\frac{1}{16}$ | | 23409 | | 5472090 $\frac{9}{16}$ |
| | 23409 | | | | 41 $\frac{1}{2}$ |
| | 5472132 $\frac{1}{16}$ | | *cuius latus* 2339 $\frac{1}{4}$ *proximè* | | 5472132 $\frac{1}{16}$ |

Secetur demum angulus k e c bifariam ipsa l e. habet igitur e c ad c l maiorem proportionem, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153.] *Rursus enim propter bipartitionem anguli, est ut k e ad e c, ita k l ad l c: et cõponenti, ut utraque k e, e c ad e c, ita k c ad c l: et permutanti, ut utraque k e, e c ad k c, ita e c ad c l. atque est ipsa quidem k e 2339 $\frac{1}{4}$, & pars quædam; ipsa uero e c 2334 $\frac{1}{4}$, & item pars quædam. utraque igitur k e, e c maior est, quàm 4673 $\frac{1}{2}$. & est k c 153. quare utraque k e, e c ad k c maiorem proportionem habet, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153. Vt autẽ utraque k e, e c ad k c, sic e c ad c l. ergo & e c ad c l maiorem proportionem habet, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153. Itaque quoniam f e c angulus, cum sit tertia pars recti, duodecima pars est quatuor rectorum: eius autem dimidium, angulus scilicet g e c eorundem est pars uigesima quarta: & eius dimidium h e c quadragesima octaua: et rursus eius dimidium k e c nonagesima sexta; cuius item dimidium l e c pars centesima nonagesima secunda. Ponatur, inquit, ipsi æqualis angulus c e m: & producatur f c ad m. angulus ergo l e m duplus scilicet anguli l e c, nonagesima sexta pars est quatuor rectorum. quare & l m latus est polygoni circulo circumscripti, quod sex & nonaginta lateribus continetur. Quoniam igitur e c ad c l ostensum est maiorem habere proportionem, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153: estq; ipsius e c dupla a c, & ipsius l c dupla l m; habet a c ad l m maiorem proportionem, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153; & è contrario l m ad a c minorem habet, quàm 153 ad 4673 $\frac{1}{2}$. & quia l m latus est polygoni sex & nonaginta laterum, eius ambitus est 14688: nam 96 in 153 multipli-* K

*plicata dictum numerum producunt. ambitus ergo polygonì ad diametrum à c minorem proportionem habet, quàm 14688 ad 4673 $\frac{1}{2}$. quare triplus est diametri circuli, & adhuc excedit 667 $\frac{1}{2}$. hæc autem minora sunt, quàm septima pars diametri, unitatis parte septima; etenim ipsorum 667 $\frac{1}{2}$ septupla, quæ sunt 4672 $\frac{1}{2}$, minora sunt, quàm diameter, unitate ipsa. Quoniam igitur ambitus polygoni minor est, quàm triplus sesquiseptimus; circuli uero ambitus minor est ambitu polygoni: multo igitur circuli ambitus minor est, quàm triplus sesquiseptimus ipsius diametri.*

L Sit circulus circa diametrum a c] *deinceps uero reliquam partem theorematis construens, Sit, inquit, circulus circa diametrum a c: et angulus b a c sit tertia pars recti. id autem fiet, si à puncto c sumentes lineam c b æqualem lateri hexagoni: iungamus ipsam a b: angulus enim in circumferentia hexagoni consistens, ad centrum quidem est duæ tertiæ recti, ad circumferentiam uero tertia recti. & quoniam rectus est angulus a b c; & ipsæ b a c tertia pars recti: erit a c b recti duæ tertiæ. si igitur producentes c b ad punctum b: & æqualem ipsi sumentes iunxerimus ex a puncto; æquilaterum triangulum erit. & cum a b cathetus basim bifariam secet: dupla est a c ipsius c b. Quòd si rursus sumamus a c 1560: erit c b 780: & quadratum a c 2433600: quadratum uero c b 608400. & si auferatur c b quadratum à quadrato a c: reliquum erit quadratum a b 1825200; cuius latus 1351 proximè: excedit enim exquisitum eius quadratum sola unitate. Quam ob caussam dixit, a b ad b c minorem habere proportionem, quàm 1351 ad 780. multiplicationes autem subijciuntur.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *a c* | 1560 | *c b* | 780 | *a b* | 1351 |
| | 1560 | | 780 | | 1351 |
| | 2433600 | | 608400 | | 1825201 |
| | 608400 | | | | 1825200 |
| | 1825200 | *cuius latus proximè* | 1351 | | 1 |

M Secetur bifariam angulus b a c ducta linea a g. itaque quoniam æqualis est angulus b a g, angulo g c b.] *In eadem enim circumferentia consistunt.*

N Sed & ipsi g a c. erit & g c b angulus ipsi g a c æqualis, & angulus communis a g c est rectus. ergo & tertius angulus g f c tertio a g c æqualis erit; & triangulum a g c triangulo c g f æquiangulum. quare ut a g ad g c, ita c g ad g f, & a c ad c f.] *Aequiangulorum enim triangulorum proportionalia sunt latera, & quæ eiusdem sunt rationis æqualibus angulis subtenduntur.*

O Sed ut a c ad c f, ita & utraque c a, a b ad b c. ut igitur utraque b a, a c ad b c, ita a g ad g c.] *Quoniam enim b a c angulus bifariam secatur ducta a f linea, est ut b a ad a c, ita b f ad f c: & componenti ut utraque b a, a c ad a c, ita b c ad c f: & permutanti ut utraque b a, a c ad b c, ita a c ad c f. & est ipsa quidem a b minor, quàm 1351: ipsa autem a c 1560; & b c 780. utraque igitur b a, a c ad b c minorem proportionem habet, quàm 2911 ad 780. quare & a c ad c f minorem habet, quàm 2911 ad 780. ut autem a c ad c f, ita a g ad g c. ergo & a g ad g c minorem habet proportionem, quàm 2911 ad 780: & propterea quadratum a g erit 8473921, & quadratum g c 608400. atque his ipsis æquale est quadratum a c; quod erit 9082321: & eius latus 3013 $\frac{3}{4}$ proximè; excedit enim exquisitum quadratum unitatibus 368 $\frac{1}{16}$. Quare dixit, a c ad c g minorem proportionem habere, quàm 3013 $\frac{3}{4}$ ad 780. multiplicationes autem subijciuntur.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *a g* | 2911 | *g c* | 780 | *a c* | 3013 $\frac{3}{4}$ |
| | 2911 | | 780 | | 3013 $\frac{3}{4}$ |
| | 8473921 | | 608400 | | 9082689 $\frac{1}{16}$ |
| | 608400 | | | | 368 $\frac{1}{16}$ |
| | 9082321 | *cuius latus* | 3013 $\frac{3}{4}$ *proximè* | | 9082321 |

Q Rursus secetur bifariam angulus c a g ducta a h.] *Nam propter bipartitionem anguli similitudinem triangulorum, laterum proportionalitatem, compositamq;, & permutatam rationem, erit ut utraque g a, a c ad c g, ita a h ad h c. & posita est a g minor, quàm 2911;*

*& a c*

& a c minor, quàm $3013\frac{3}{4}$. utraque igitur g a, a c minor est, quàm $5924\frac{3}{4}$. ipsa uero g c est 780. Quare utraque g a, a c ad c g minorem habet proportionem, quàm $5924\frac{3}{4}$ ad 780: & idcirco a h ad h c minorem habet, quàm $5924\frac{3}{4}$ ad 780. ergo a h ad h c habet minorem proportionem, quàm $455\frac{3}{4}$ ad 60: utraque enim utriusque est pars tertia decima; & horum quadrupla a h ad h c minorem habet, quàm 1823 ad 240. Quamobrem dixit, utranque utriusque esse $\frac{4}{13}$. & quoniam a h est 1823: erit quadratum ipsius 3323329. & est h c 240, cuius quadratum 57600. est autem duobus quadratis a h, h c æquale quadratum a c. quadratum igitur a c erit 3380929: & eius latus $1838\frac{9}{11}$: nam quadratum $1838\frac{9}{11}$ superat exquisitum quadratum unitatibus [321] proxime. quare a c ad c h minorem proportionem habet, quàm $1838\frac{9}{11}$ ad 240. multiplicationes autem subijciuntur. $323\frac{37}{121}$

| | | |
|---|---|---|
| a h 1823 | h c 240 | a c $1838\frac{9}{11}$ |
| 1823 | 240 | $183\frac{9}{11}$ |
| 3323329 | 57600 | $3381252\frac{37}{121}$ |
| 57600 | | 3380929 |
| 3380929, cuius latus $1838\frac{9}{11}$ proximè | | $323\frac{37}{121}$ |

Secetur item bifariam angulus h a c ducta k a.] *Rursus propter bipartitionem anguli, triangulorum similitudinem, laterum proportionalitatem, & compositam, permutatamq; rationem, est ut utraque h a, a c ad c h, ita a k ad k c. sed utraque h a, a c minor est, quàm $3661\frac{9}{11}$: quoniam h a posita est 1823, & a c $1838\frac{9}{11}$. est autem & h c 240. utraque igitur h a, a c ad c h minorem proportionem habet, quàm $3661\frac{9}{11}$ ad 240. quare & a k ad k c minorem habet, quàm $3661\frac{9}{11}$ ad 240. At ipsorum $3661\frac{9}{11}$ undecim quadragesimæ sunt 1007: ipsorum autem 240 totidem quadragesimæ 66. ergo a k ad k c minorem habet proportionem, quã 1007 ad 66. atque est quadratum a k 1014049: & quadratum k c 4356. quibus cum sit æquale a c quadratum; erit ipsum 1018405, & ipsius latus $1009\frac{1}{6}$ proximè: excedit enim exquisitum quadratum unitatibus $12\frac{13}{36}$. quare a c ad c k minorem habet proportionem, quàm $1009\frac{1}{6}$ ad 66. multiplicationes uero subijciuntur.* R

| | | |
|---|---|---|
| a k 1007 | k c 66 | a c $1009\frac{1}{6}$ |
| 1007 | 66 | $1009\frac{1}{6}$ |
| 1014049 | 4356 | $1018417\frac{13}{36}$ |
| 4356 | | 1018405 |
| 1018405, cuius latus $1009\frac{1}{6}$ proximè | | $12\frac{13}{36}$ |

Secetur postremo k a c angulus l a.] *Propter eadem, quæ sæpius diximus, est ut utraque k a, a c ad k c. ita a l ad l c, atque est ipsa quidem a k minor, quàm 1007: ipsa uero a c minor, quàm $1009\frac{1}{6}$: & k c 66. utraque igitur k a, a c ad k c minorem habet proportionem, quàm $2016\frac{1}{6}$ ad 66. ergo & a l ad l c minorem habet, quàm $2016\frac{1}{6}$ ad 66. & quoniam a l posita est $2016\frac{1}{6}$: erit quadratum ipsius $4064928\frac{1}{36}$. & est l c 66, cuius quadratum 4356; æquale autem ipsis est quadratum a c, erit igitur quadratũ a c $4069284\frac{1}{36}$, & eius latus $2017\frac{1}{4}$ proximè, excedit enim exquisitum quadratum unitatibus [$13\frac{6}{25}$] quare a c ad c l minorem proportionem habet, quàm $2017\frac{1}{4}$ ad 66. multiplicationes autem subijciuntur.* S $13\frac{77}{144}$

| | | |
|---|---|---|
| a l $2016\frac{1}{6}$ | l c 66 | a c $2017\frac{1}{4}$ |
| $2016\frac{1}{6}$ | 66 | $2017\frac{1}{4}$ |
| $4064928\frac{1}{36}$ | 4356 | $4069297\frac{9}{16}$ |
| 4356 | | $4069284\frac{1}{36}$ |
| $4069284\frac{1}{36}$ cuius latus $2017\frac{1}{4}$ | | $13\frac{77}{144}$ |

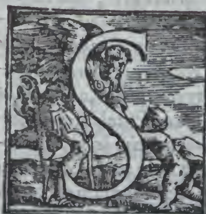
*Quoniam igitur a c ad c l minorem proportionem habet, quàm $2017\frac{1}{4}$ ad 66: è contrario l c ad c a maiorem habet proportionem, quàm 66 ad $2017\frac{1}{4}$. & quoniam c b circumferentia sexta pars*

pars est ipsius circuli: erit circumferentia g c pars duodecima: h c uigesima quarta: k c quadrage-
sima octaua: & l c nonagsima sexta. quare recta linea l c latus est polygoni, quod sex et nona-
ginta lateribus continetur. atque est l c 66. polygoni igitur ambitus ad diametrum circuli maio-
rem propositionem habet, quàm 6336 ad $2017\frac{1}{4}$. hæc autem sunt tripla, & adhuc superant
$28\frac{117}{245}$ $284\frac{1}{4}$; quæ quidem maiora sunt, quàm decem septuagesimæ primæ: nanque earum una est [$27\frac{2}{3}$]
$284\frac{17}{142}$ proximè: & harum decupla [277]. multo igitur maior est circuli circumferentia, quàm tri-
pla super decies partiens septuagesimas primas. Numeri igitur ab eo positi, ut fieri potuit, mediocri
ter explicati sunt. Sciẽdum autem Apollonium Pergæum ἐν τῷ ὠκυτοβόῳ idem per alios numeros de-
monstrasse, adduxisseq; ad maiorem propinquitatem. Quod quidem exquisitius factum uidetur. sed
tamen ad Archimedis propositũ nihil confert: diximus enim ipsum in hoc libello proposuisse id, quod
propinquum est, inuenire, propter necessarios uitæ usus. Quare neque Porus Nicænus opportune ac
cusauit Archimedem, quòd non exacte inuenerit, cui rectæ lineæ circuli circumferentia sit æqualis.
ex quibus ipse in libris super ea re conscriptis dixit, præceptorem suum, Philonem intelligens Gada-
reum, ad exactiores numeros rem adduxisse, quàm sint ij, qui ab Archimede sunt expositi, uidelicet
7 & 22: omnes enim deinceps uidentur propositum eius ignorasse. utuntur autem multiplicationi
bus myriadum, & diuisionibus, quas non facile assequetur, nisi qui in Magni rationibus fuerit
uersatus. Quòd siquis omnino uoluerit ad minima redigere, utatur ijs, quæ in mathematica com-
positione à Claudio Ptolemæo tradita sunt, per partes, & minutiis, & per rectas lineas in circulo
aptatas. atque ego id iam fecissem, nisi, quod sæpius dixi, intellexissem, fieri non posse, ut per ea,
quæ hic posita sunt, exquisite inueniatur recta linea circuli circumferentiæ æqualis: quanquam ei,
quod proximum est, & ferè idem attentatur. itaque sufficiunt ea, quæ ab Archimede hoc loco di-
cta sunt.

FEDERICI

# FEDERICI COMMANDINI
## IN EANDEM CIRCVLI DIMENSIONEM COMMENTARIVS.

### IN PROPOSITIONEM I.



S Ecentvr'qve circumferentiæ bifariam, & ſint portiones iam minores exceſſu, quo circulus ipſum triangulum excedit.] *Vel hoc loco non nulla deſiderantur, uel ita breui ſermone uſus eſt Archimedes, quoniam ex duodecimo elementorum libro, propoſitione ſecunda, manifeſte patet, quò modo per figuram in circulo deſcriptam tandem relinquantur quædam portiones, quæ minores ſint qualibet propoſita magnitudine.* A

Sumatur centrum n & perpendicularis n x.] *Sumatur centrum circuli, quod ſit n: & ab ipſo ducatur n x perpendicularis ad latus figuræ inſcriptæ. erit n x minor circuli ſemidiametro, hoc eſt trianguli rectanguli latere.* B

Quare figura rectilinea minor eſt e triangulo.] *Si enim linea n x æqualis eſſet trianguli lateri: haberent omnia triangula, ex quibus figura rectilinea conſtat, ad triangulum e eandem proportionem, quam baſes omnes ad ipſius trianguli baſim; & idcirco figura eo minor eſſet. Nunc uero cum etiam linea n x minor ſit latere trianguli: figuram ipſam triangulo e multo minorem eſſe neceſſe eſt.* C prima vi.

Triangulum igitur r o p maius eſt, quàm dimidium figuræ o f a m.] *Nam triangulum r a o maius eſt, quàm ipſum m a r. quare multo maius, quàm figura contenta rectis lineis a r, r m, & circuli circumferentia a m: quæ quidem pars eſt trianguli m a r: & eadem ratione triangulum a o p maius eſt, quàm figura contenta rectis lineis a p, p f, & circumferentia circuli a f. ex quibus ſequitur totum triangulum r o p maius eſſe, quàm ſint utræque figuræ a r m, a p f: & idcirco maius, quàm dimidium figuræ o f a m.* D prima vi.

Itaque ſumantur portiones ipſi p f a ſimiles; quæ quidem minores ſint eo, quo triangulum e excedit a b c d circulum.] *Circumſcripto quadrato ipſi circulo, ſuperficies, quæ continentur lateribus quadrati, & circuli circumferentia, uel erunt minores exceſſu, quo triangulum excedit ipſum circulum, uel maiores, uel æquales. Sint primum minores. ergo quadratum adhuc minus eſt triangulo: quod eſt abſurdum, cum ſit eo maius: eſt enim n m æqualis catheto trianguli, & ambitus quadrati maior baſi eiuſdem. ſi uero ſint æquales; ſequitur quadratum æquale eſſe triangulo: quod item eſt abſurdum. At ſi ponantur eſſe maiores: arcus bifariam ſecentur: & per ſectionum puncta ducantur lineæ contingentes, ut dictum eſt. Cum igitur triangulum r o p ſit maius, quàm dimidium figuræ o f a m: ſublatis quatuor huiuſmodi triangulis, erit ſublatum plus, quàm dimidium dictarum ſuperficierum. Quare ſi hoc rurſus fiat, & eius, quod fuit reliquũ, ſublatum erit plus, quàm dimidium; & ſi idem continenter fiat: relinquentur ad extremum portiones, quæ minores erunt dicto exceſſu; & idem abſurdum ſequetur. oſtenſum namque eſt in decimo libro elementorum, propoſitione prima, Duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi à maiori auferatur plus, quàm dimidium: & ab eo, quod reliquum eſt, auferatur rurſus plus, quàm dimidium: hocq; ſemper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor ſit minore magnitudine expoſita.* E

### IN PROPOSITIONEM II.

Quoniam igitur a c e triangulum ad triangulum a c d eam proportionem habet, quam 21 ad 7, triangulum autem a c d ad triangulum a e f habet eam, quam 7 ad 1: erit a c f triangulum ad triangulum a c d, ut 22 ad 7.] *Cum enim linea d e dupla ſit ipſius c d: erit tota c e ipſius c d tripla. quare & triangulum a c e ad triangulum a c d triplam habet proportionem: hoc eſt eam, quam 21 ad 7: & cum triangulum a c d ad ipſum a e f eandem habeat, quam 7 ad 1: habebit ex æquali a c e triangulum ad ipſum a e f eam, quam 21 ad 1: & componendo utraque triangula a c e, a e f: hoc eſt triangulum a c f ad a e f, quam 22 ad 1.* A prima vi. 22. v. 18. v.

*eſt autem*

*est autem triangulum a e f ad a c d, ut 1 ad 7. quare rursus ex æquali triangulum a c f ad ipsum a c d erit, ut 22 ad 7.*

## IN PROPOSITIONEM III.

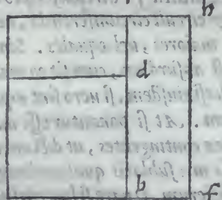
*IN hoc tertio theoremate sæpissime necesse habemus, Dato latere, superficiem eius quadratam inuenire. Et contra data superficie quadrata, inuenire eius latus, siue uerum, siue uero propinquũ. nam cum superficies à quadrato numero denominatur, uerum eius latus inuenire licet; cum autem à numero non quadrato, non item; sed uero propinquum uenamur. Et insuper ex datis inter se quantitatibus compositum quod nam sit; Et si data quantitas ab altera item data auferatur, quod reliquũ sit, comperire. Et datarum quantitatum proportionem ad integras partes redigere. Quorum omnium cum operationes omnibus sint in promptu: nos demonstrationes adiungere conabimur, quas nullus hactenus, quod sciam, uniuerse complexus est. Theon quidem in magnam Claudij Ptolemæi compositionem scribens demostrauit, quomodo data superficie quadrata propinquum eius latus inueniatur, per partes, & sexagenarias primas, secundas & quæ deinceps sunt: qui modus astrologis fuit peculiaris. posteriores uero per partes, & earum, ut aiunt, fractiones idem illud efficere conati sunt: idq; duplici uia: uel enim latus, quod uero latere minus, uel quod maius esset, sumpserunt. Quæ quidem nos inferius tractabimus, postquam alia non nulla præmiserimus.*

Notam, seu datam quantitatem hoc loco intelligi uolumus non solum eam, quam mensura uulgata, aut quomodocunque ad arbitrium sumpta secundum datum numerum metitur: sed etiam, quæ ad eam mensuram proportionem habet in numeris datam.

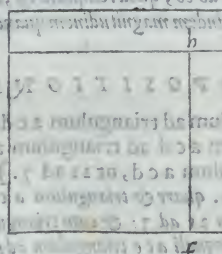
Quantitates inter se datas dicimus, quas una communis mensura metitur, uel quæ ad communem mensuram proportionem habent in numeris datam.

### PROPOSITIO I.

Cuiuslibet datæ lineæ & quadratum datum erit.




*SI quidem datam lineam metitur uulgata mẽsura: quadratum eius dabitur ex ijs, quæ monstrauit Ioannes Regiomontanus libro primo de triangulis, propositione prima. si uero ea ad uulgatam mẽsuram proportionem habet in numeris datam; uel erit minor uulgata mensura, uel maior. Sit primum minor; & sit ab; cuius quadratum a b c d est id, quod quærimus. linea uero c ponatur uulgata mensura. Itaque a b & a c lineas eousque producemus, quousque æquales sint ipsi e; quæ sint a f, a g: deinde completo quadrato a h, ipsam quoque b d lineam producemus ad g h in punctum i. Quoniam igitur a b data est; quæ ad uulgatam mensuram proportionẽ habet*



*bet in numeris datam: sint dati numeri eius proportionis minimi l m; quorum l ad m eam proportionem habeat, quam a b ad ipsam e mensuram: ducaturq́; l numerus in seipsum, & productum sit n: postea ducatur in m, & producat o: ipso autem m in se se ducto fiat p. erunt tres numeri n o p proportionales, minimi in ea proportione, quæ est l ad m. Dico iam quadratum a d eandem habere proportionem ad quadratum a h uulgatæ mensuræ, quam habet numerus n ad ipsum p. est enim sicut a c ad a g: hoc est, sicut a b data linea ad e mensuram, ita a d quadratum ad rectangulum a i. sicut autem a b ad e, ita l numerus ad numerum m; hoc est n ad o. quare quadratum a d ad rectangulum a i eandem proportionem habet, quam n ad o. Rursus sicut a b ad e; hoc est ad a f ei æqualem, ita rectanglum a i ad quadratum a h. ergo rectangulum a i ad quadratum a h est, sicut l ad m: hoc est sicut o ad p. sed erat a d quadratum ad rectangulum a i, sicut n ad o. Quare ex æquali quadratum a d ad quadratum a h eam proportionem habet, quam n ad p. Quòd si a b data linea maior sit uulgata mensura, descripto quadrato a b c d ex linea a b abscindatur æqualis ipsi e; quæ sit a f: ex linea item a c abscindatur æqualis eidem: sitq́; a g: & perficiatur quadratum a h. Similiter demonstrabitur quadratum a d ad quadratum a h eandem habere proportionem, quam habet n numerus ad numerum p. atque hoc est, quod demonstrare oportebat. Cum ergo quadratum a h uulgatæ mensuræ datum sit: & ipsum a d quadratum dabitur ex data proportione in numeris n & p.*

2. VIII.
prima VI.
prima VI.
22. V.

## OPERATIO.

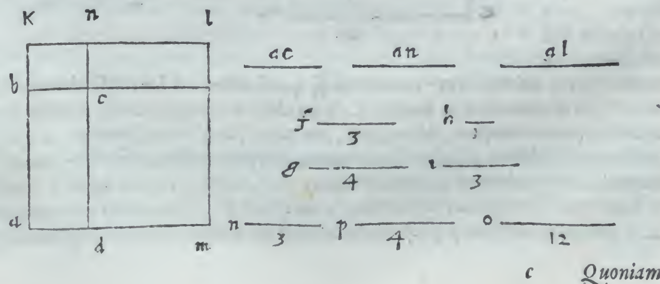
Numerorum datæ proportionis uterque in semetipsum multiplicetur; & quam proportionem habuerit quadratum primi numeri ad quadratum secundi, eandem habebit & quadratum datæ lineæ, quod quærimus, ad quadratum uulgatæ mensuræ.

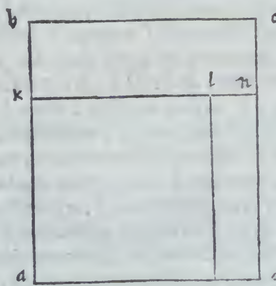
$\frac{2-2}{3-3}\ \frac{4}{9}$ $\qquad$ $\frac{6-6}{5-5}\ \frac{36}{25}$

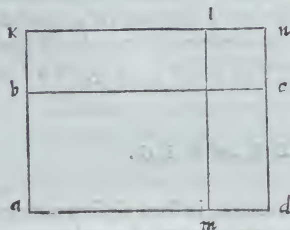
## PROPOSITIO II.

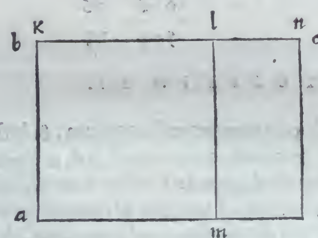
Quod duabus inter se datis lineis continetur rectangulum, & ipsum datum erit.

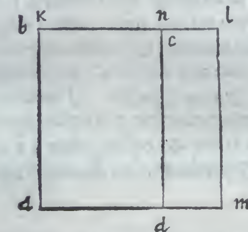
*SIT rectangulum a c duabus inter se datis lineis contentum a b, a d. et siquidem datæ lineæ sint, quas metiatur communis quæpiam mensura: illud ipsum datũ erit, ex demonstratis à Ioanne Regiom. libro primo de triangulis, propositione sextadecima. si uero ipsæ ad communem mensuram proportionem habeant in numeris datam: sit communis illa mensura e, ad quam linea a b ita sit, ut f numerus ad numerum g: linea uero a d ad eandem sit, ut numerus h ad i numerũ. Vel igitur utræque datæ lineæ ipsa e maiores erunt; uel utræque minores; uel una maior, altera minor; uel altera æqualis, altera maior, aut minor. Sint primo utræque minores: & producantur ad æqualitatem communis mensuræ e: & compleatur quadratum a k l m: ipsa quoque d c producatur ad lineam k l in punctum n. Et cum linea a b ad ipsam e; hoc est ad a k ita sit, ut f numerus ad numerum g: erit rectangulum a c ad rectangulum a n, ut numerus f ad ipsum g. Rursus cum linea a d ad eandem e; hoc est ad a m ita sit, ut numerus h ad ipsum i: erit & rectangulum a n ad quadratum a l, ut h ad i: Ducatur f numerus in numerum h: & producatur n: ducatur item g in i: & productum sit o: deinde ex ipso g in h ducto fiat p. Dico rectãgulum a c ad quadratum a l eam proportionem habere, quam habet n ad o.* prima VI.






*Quoniam enim numerus h duos numeros multiplicat f & g:*
17. VII. *facti numeri n & p eandem habent proportionem. quare a c rectãgulum ad ipsum a n erit ut n ad p. & rursus quoniam g duos numeros multiplicat h et i: producti p & o in eadem proportione erunt: & id circo erit a n rectãgulum ad quadratum a l, ut p ad o.*
22. V. *ergo ex æquali a c rectãgulum ad quadratum a l, ut n ad o. Si uero utræque datæ lineæ sint communi mensura e maiores: abscindantur ab his a k, a m lineæ ipsi æquales: & perficiatur quadratum a k l m: postea k l producatur ad c d in n. Quòd si altera maior sit, altera minor: sit a b minor: & producatur ad æqualitatem ipsius e; quæ sit a k: & ab ipsa a d abscindatur æqualis eidem uidelicet a m: compleaturq; quadratum a k l m: ipsæ demum k l, & d c producantur; ita ut conueniant in puncto n. Non aliter procedemus in describenda figura, si altera sit æqualis communi mensuræ, altera uero, aut maior, aut minor; minorem nanque producemus, & maiorem resccabimus ad ipsius æqualitatem. His ita constitutis similiter demonstrabimus a c rectangulum ad quadratum a l eandem habere proportionem, quam habet n numerus ad numerum o; quod ipsum demonstrare uolebamus. Cum igitur a c rectangulum ad datum quadratum a l (est enim communis mensuræ) proportionem habeat in numeris datam: & ipsum necessario dabitur.*

## OPERATIO.

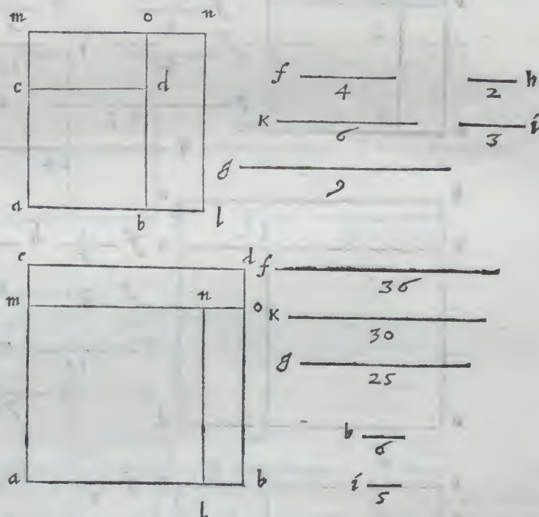
Numeros datarum proportionum multiplicabimus; antecedentem in antecedentem; & conſequentem in conſequentem; & quam proportionem habuerit productum ex antecedentibus ad productum ex conſequentibus, eandem habebit quæ ſitum rectangulum ad quadratum communis menſuræ.

| | | |
|---|---|---|
| 3 − 1 3 | 10 − 5 50 | 2 − 4 8 |
| 4 − 3 12 | 7 − 4 28 | 3 − 3 9 |

## PROPOSITIO III.

Quadrato noto, latus eius ignotum eſſe non poterit.

*De eo quadrato hic ſermo eſt, quod latus habet longitudine rationale: nam de eo, quod potentia tantum rationale habet, inferius dicetur. Sit quadratum eiuſmodi notum a b c d. & ſiquidem men ſuratur à quadrato e, uulgatæ menſuræ: latus eius notum fiet ex 2. primi de triangulis. Si uero ad quadratum dictum proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; uel erit eo maius, uel mi nus. Sit primum minus; & ſint numeri datæ proportionis f & g: inueniantur q; eorum latera: & ipſius quidem f latus ſit h; ipſius uero g ſit i. Dico quadrati a b c d latus, uidelicet a b, notum iam eſſe. habebit enim ad ipſam e proportionem eadem, quam habet numerus h ad i numerum: nanque ex undecima octaui elementorum conſtat, inter f & g cadere numerum quendam proportionalem, qui ſit k: & proportionem f ad g duplam eſſe eius, quæ eſt h ad i. Quare ſicut f ad k, & ſicut k ad g, ita erit h ad i. Et quoniam*




*quadratum a b c d eſt minus quadrato e: producantur eius latera a b, a c; adeo ut fiant æqualia ipſi e: & compleatur quadratum a l m n: producatur item latus b d uſque ad m n in o. erit ut* prima vi.
*a c ad a m, hoc eſt, ut a b ad e, ita quadratum a d ad rectangulum a o: & ut a b ad a l, hoc eſt ad e, ita rectangulum a o ad quadratum a n. Quare erunt tres ſuperficies proportionales in eadem proportione, in qua eſt linea a b ad e. Rurſus quoniam poſitum eſt quadratum a d ad quadratum e eſſe ſicut f ad g. erunt tres numeri f k g proportionales in eadem illa proportione, in qua ſunt tres dictæ ſuperficies a d, a o, a n: & propterea linea a b ad e eandem proportionem habebit, quam habet numerus h ad numerum i. Si uero quadratum a b c d ſit maius quadrato e: abſcindantur ab ipſis a b, a c, lineæ ipſi e æquales, quæ ſint a l, a m: & compleatur quadratum a l m n: ipſa autem m n producatur uſque ad d b in o. Eadem ratione monſtrabitur lineam a b ad e, eam habere proportionem, quam habet h ad i: quod monſtrare oportebat.*

OPERATIO.

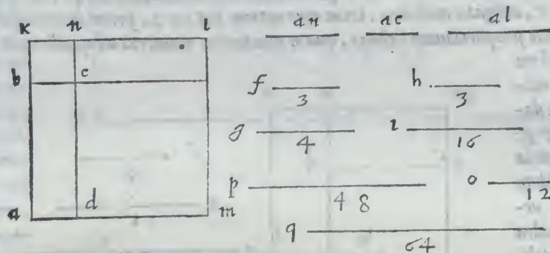
Inueniatur latus quadratum numerorum datæ proportionis, & quam proportionem habuerit latus primi ad latus secundi, eandem habebit latus quæsitum ad uulgatam mensuram.

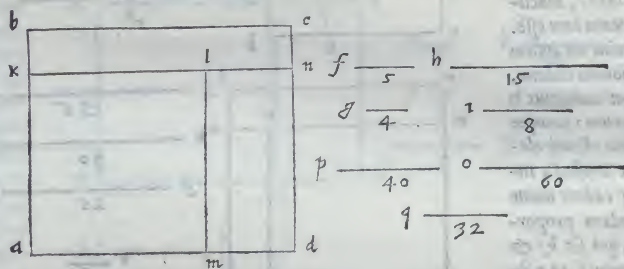
$\frac{4}{9}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{36}{25}$ $\frac{6}{5}$

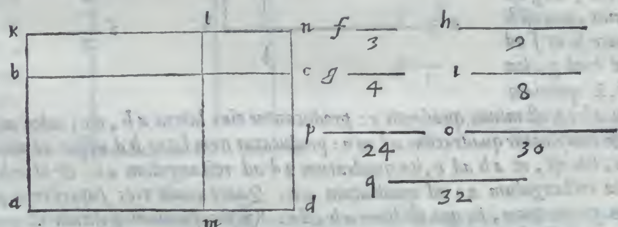
PROPOSITIO IIII.

Dato latere quolibet rectanguli cogniti, alterum quoque latus dabitur.

*SIT rectangulum cognitum a b c d, cuius latus a b datum sit. erit alterum quoque a d datum. nã si datũ latus, et rectangulum mensurentur à communi quapiam mensura, uidelicet latus à mensura li*



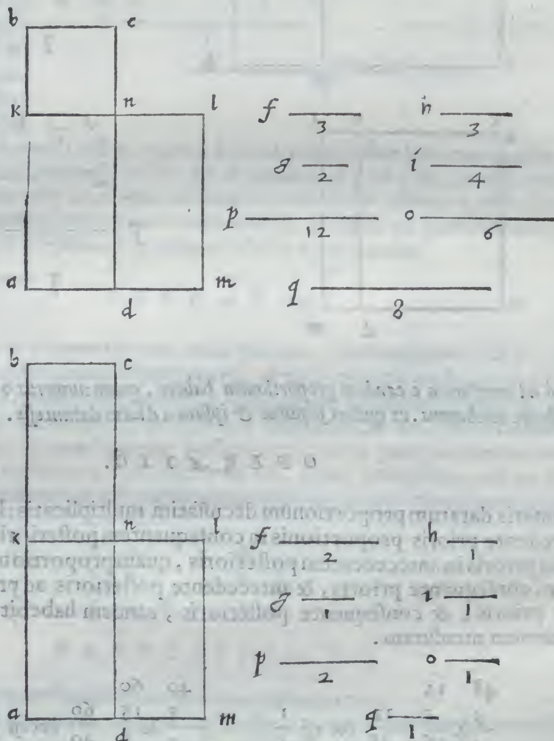



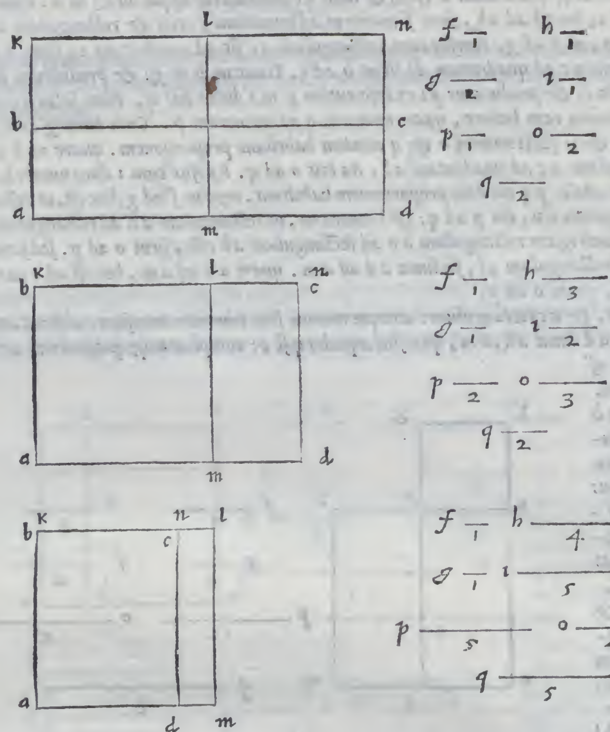




*neari, & rectangulum ab eadem quadrata: quod quærimus fiet manifestũ, ex septima decima primi libri de triangulis. Si uero ipsa ad communem mensuram proportionem habuerint in numeris datam: sit communis mensura e, ad quam a b eam proportionem habeat, quam numerus f ad numerum g: & rectangulum a c ad quadratum ipsius e, quam h numerus ad numerum i. Sint autem primum*

primum utraque communi meusura minora: & producantur latera a b, a d; ita ut sint æqualia ipsi e: compleaturq; quadratum a k l m: & item d c producatur usque ad k l in n. Cum ergo latus a b sit ad e, hoc est ad a k, sicut f numerus ad numerum g: erit & rectangulum a c ad re- 1. vii.
ctangulum a n, ut f ad g. Rursus cum rectangulum a c sit ad quadratum e, sicut h ad i: erit & rectangulum a c ad quadratum a l sicut h ad i. Ducatur h in g: & productum sit o. ducatur item f in i; & producatur p: ex ipso autem g in i ducto fiat q. Dico latus a d quæsitum ad e proportionem eam habere, quam numerus o ad numerum p. Cum enim g duos numeros multiplicet h & i: facti numeri o & q eandem habebunt proportionem. quare ut h ad i, hoc 17. vii.
est ut rectangulum a c ad quadratum a l, ita erit o ad q. Rursus cum i duos numeros multiplicet f & g: producti p q eandem proportionem habebunt. ergo ut f ad g, hoc est, ut rectangulum a c ad rectangulum a n, ita p ad q: & è contrario, ut rectangulum a n ad rectangulum a c, ita q ad p. ex æquali igitur rectangulum a n ad rectangulum a l erit, sicut o ad p. sed sicut rectan- 23. vi.
gulum a n ad rectangulum a l, sic linea a d ad a m. quare a d ad a m, hoc est ad e eam propor 1. vi.
tionem habet, quam o ad p.

Si latus a b, & a c rectangulum: utraque maiora sint communi mensura: abscindantur à lineis ipsis a b, a d lineæ a k, a m, quæ sint æquales ipsi e: compleaturq; quadratum a k l m: & k l producatur usque ad c d in n. Si uero latus a b sit minus e mensura; & rectangulum a c maius quadrato eiusdem: producemus a b, ut fiat æquale ipsi e, quod sit a k: & ab ipso a d abscindemus eidem æqualem a m: & perficiemus quadratum a k l m: itemq; k l & d c producemus; adeo ut conueniant in puncto n. Quòd si latus a b sit maius ipsa e; & rectangulum quadrato e minus: ab ipso a b abscindemus a k: & a d producemus ad æqualitatem mensuræ e: complebimusq; quadratum a k l m: in quo uero puncto linea k l secat ipsam c d, sit n. Si denique latus a b æquale sit ipsi e; & rectangulum a b c d maius, aut minus quadrato eiusdem, uel contra rectangulum dicto quadrato æquale; & latus a b ipsa e, aut maius, aut minus: figuras describemus sicuti superius factum est; quæ maiora sunt communi mensura resecando; quæ uero minora producendo ad eius æqualitatem. similiterq; in omnibus demonstrabimus






*mus a d ad menſuram c eandem proportionem habere, quam numerus o ad numerum p; quod demonſtrare uolebamus. ex quibus ſequitur & ipſum a d latus datum eſſe.*

## OPERATIO.

Numeris datarum proportionum decuſſatim multiplicatis; hoc eſt multiplicato antecedente prioris proportionis in conſequentem poſterioris, & contra conſequente prioris in antecedentem poſterioris, quam proportionem habuerit productum ex conſequente prioris, & antecedente poſterioris ad productum ex antecedente prioris, & conſequente poſterioris, eandem habebit latus quæſitum ad communem menſuram.

$$\overset{48\quad 12}{\frac{3}{4}\times\frac{3}{16}}\quad \frac{12}{48}\ \textit{hoc est}\ \frac{1}{4} \qquad \overset{40\quad 60}{\frac{5}{4}\times\frac{15}{8}}\quad \frac{60}{40}\ \textit{hoc est}\ \frac{3}{2}\ \textit{hoc est}\ 1\,\frac{1}{2}$$

## PROPOSITIO V.

Datarum inter ſe quantitatum inæqualium, & differentia data erit.

*SINT quantitates inter ſe datæ, a b quidem maior, c uero minor; quarum differentia ſit a e. dico hanc quoque datam eſſe. ſi enim à communi menſura menſurentur datæ quantitates: nota fiet earum*

*earum differentia ex quarta primi de triangulis. Sin autem hæ ad communem mensuram proportionem habeant in numeris datam: sit illa mensura d; ad quam a b proportionem habeat, quam f numerus ad numerum g: & ad eandem d ipsa c proportionem habeat, quam numerus h ad i numerú. ducatur i in f & g; & qui producuntur numeri, sint k l, & n: ducatur item g in h, & productam sit m: postea uero m ab ipso k l dempto, reliquum si k o. habebit differentia a c, quam quærimus, ad communem mensuram d, eam proportionem, quam habet k o ad n. Quoniam enim i duos numeros multiplicat f & g: erunt producti k l & n in eademmet proportione. quare & a b ad d, erit, ut k l ad n. Rursus quoniam g duos numeros multiplicat h & i: producti m & n proportionem eandem habebunt; atque erit c ad d, ut m ad n: & è contrario d ad c, ut n ad m. ergo ex æquali a b ad c, ut k l ad m. est autem e b ipsi c æqualis, cum a d sit excessus, quo a b ipsum c excedit; & eadem ratione o l est æqualis ipsi m. quare a b ad e b proportionem habet eam, quam k l ad o l: & diuidendo a e ad e b, quam k o ad o l. sed e b æqualis ipsi c ad d est, sicut o l æqualis ipsi m ad n. ex æquali igitur erit a e excessus ad communem mensuram, sicut k o ad n: quod monstrare uolebamus. proportio autem k o ad n nota cum sit, & ipsam a c quantitatem notam efficiet; quæ ad communem mensuram proportionem habet in numeris datam.*

*OPERATIO.*

Numeris datarum proportionum multiplicatis, antecedente scilicet prioris proportionis in consequentem posterioris, & antecedente posterioris in consequentem prioris, & consequente unius in consequentem alterius, productoq; ex consequente prioris, & antecedente posterioris subtracto ab eo, quod factum est ex antecedente prioris, & consequente posterioris, quam proportionem habuerit id, quod post subtractionem remanserit ad id, quod productum est ex duobus consequentibus, eandem habebit differentia quæsita ad communem mensuram.

4 3 4

$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ 6 $\frac{3}{1}$ $\frac{1}{6}$

*PROPOSITIO VI.*

Ex datis inter se quantitatibus compositum datum erit.

*SI datæ quantitates à communi mensurentur mensura: ex eis compositum datum erit, per tertiam primi de triangulis. sin minus, sint, ut in figura superius descripta a b & c, quæ ad communem mensuram d proportionem habeant secundum eos numeros datam. Dico compositum ex ipsis datum esse: nam numeris itidem multiplicatis, atque ijs, qui ab eis producuntur dispositis, compositum ipsum ad communem mensuram, eandem habebit proportionem, quam compositum ex k l & m ad n. Quoniam enim a b ad c est sicut k l ad m: erit coniungendo compositum ex a b & c ad c, sicut compositum ex k l & m ad m. est autem & c ad d, sicut m ad n. quare ex æquali compositum ex a b & c ad d erit sicut compositum ex k l & m ad ipsum n: & propterea datum erit, cum ad communem mensuram proportionem habeat in numeris datam.*

*OPERATIO.*

## OPERATIO.

Numeris datarum proportionum modo ſuperius dicto multiplicatis, & productis ex antecedentibus unius, & conſequentibus alterius ſimul iunctis, quam proportionem habuerit compoſitum ipſum ad id, quod factum eſt ex ductu conſequentium inter ſeſe, eam habere dicemus compoſitum ex a b & c, quod quærimus, ad d communem menſuram.

4 3 4

$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ $\frac{7}{6}$ $\frac{3}{7}$

## PROPOSITIO VII.

Datarum inter ſe quantitatem proportio quoque data erit.

*SI datæ quantitates menſurētur à communi quadam menſura: earum proportio iam data erit; habebunt enim inter ſe ſe proportionem eandem, quam numeri, ſecundum quos menſuranur. Quòd ſi ad communem menſuram proportionem habeant in numeris datam: dabitur tunc quoque earum proportio. Sint enim quantitates ſic datæ a b: & ſit c communis menſura: habeat autem a ad c proportionem eam, quam numerus d ad numerum e: & b ad eandem c habeat eam, quam numerus f ad ipſum g. Ducatur d in g: & productum ſit h. ducatur deinde e in f: & producatur k. poſtremo e ipſo in g ducto, fiat l. Et quoniam g duos numeros multiplicat d & e producti h & l eandem habebunt proportionem. quare a ad c erit, ut h ad l. Rurſus quoniam e duos numeros multiplicat f et g: erunt facti inde numeri k et l in eadē proportione: atque erit b ad c, ut k ad l: & è contrrio c ad b, ut l ad k. ſed erat a ad c, ut h ad l. ergo ex æquali a ad b erit, ut h ad k. proportio autem h ad k data eſt, quòd terminos habeat notos. data igitur erit & proportio a ad b, ut oportebat.*

## OPERATIO.

Numeris datarum proportionum decuſſatim multiplicatis, quam proportionum habuerit productum ex antecedente prioris, & conſequentē poſterioris, ad productum ex conſequente prioris, & antecedente poſterioris, eandem habere inuenietur quantitas a ad quantitatem b.

8 9

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ $\frac{8}{9}$

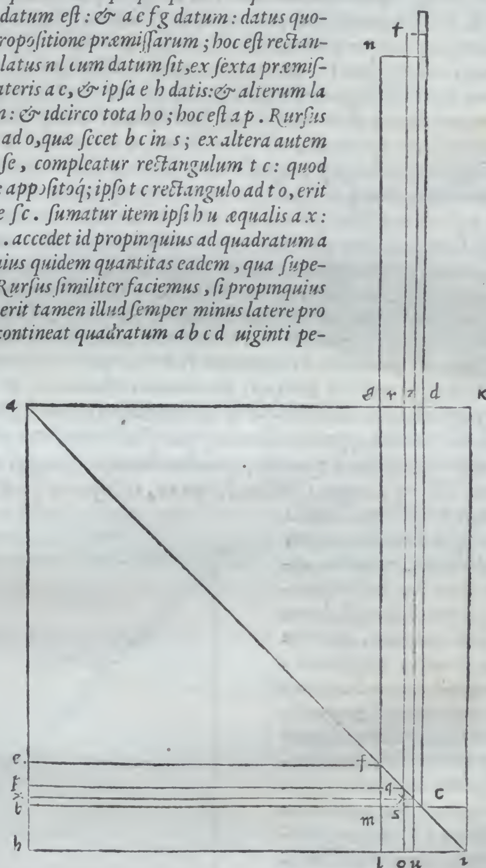
## PROPOSITIO VIII.

Quadrati noti latus potentia tantum rationale habētis propinquū latus inuenire.

SIT

*SIT quadratum eiusmodi a b c d; cuius oporteat latus propinquum inuenire. sumatur primo quadratum proxime minus, habens latus rationale longitudine, quod sit a e f g: & item sumatur quadratum proximè maius a h i k: producaturq; f g; ex parte quidem f usque ad lineam h i in l, secans b c in m; ex parte uero g usque ad n; ita ut sit g n æqualis ipsi g f: & compleatur rectangulum n c. erit ipsum n d rectangulum æquale rectangulo d f, hoc est ipsi f b. quare totum n c æquale erit gnomoni b f d. Si igitur rectangulo n c ad lineam n l apposito, sit latus alterum l o: erit illud minus ipso m c. nam quia n c rectangulum æquale est rectangulo n o: habebit latus n m ad n l eam proportionem, quã l o ad m c. sed m n minus est ipso n l. et l o igitur ipso m c minus erit. Deinde sumpta a p æquali ipsi h o, describatur quadratum a p q r. quod cum satis propinquum sit quadrato a b c d: & eius latus a p lateri a b propinquum comperietur. Quoniam enim quadratum a b c d datum est: & a e f g datum: datus quoque erit gnomon b f d, ex quinta propositione præmissarum; hoc est rectangulum n c; hoc est ipsum n o. cuius latus n l cum datum sit, ex sexta præmissarum; constat nanque ex duplo lateris a e, & ipsa e h datis: & alterum latus l o dabitur, ex quarta earundem: & idcirco tota h o; hoc est a p. Rursus producta r q; ex parte quidem q ad o, quæ secet b c in s; ex altera autem ad t ut sint q r, r t æquales inter se, compleatur rectangulum t c: quod similiter erit æquale gnomoni b q d: appositoq; ipso t c rectangulo ad t o, erit & latus alterum o u, minus latere s c. sumatur item ipsi h u æqualis a x: & describatur quadratum a x y z. accedet id propinquius ad quadratum a b c d: & latus a x ad latus a b; cuius quidem quantitas eadem, qua superius usi sumus ratione, nota fiet. Rursus similiter faciemus, si propinquius adhuc latus inuenire uoluerimus. erit tamen illud semper minus latere propositi quadrati. Exempli gratia, contineat quadratum a b c d uiginti pedes. continebit proxime minus quadratum a e f g pedes sexdecim: & proxime maius uiginti quinque, hoc est a h i k: eritq; latus a e pedum quatuor: & a h quinque. itaque demptis sexdecim ex uiginti, reliquentur quatuor: & totidem pedum erit gnomon b f d, hoc est rectangulum n c. quod quidem si apponatur ad n l, quæ est pedum nouem: prodibit l o quatuor partium ex nouem unius pedis. quare tota h o, hoc est a p habebit pedes quatuor, & quatuor nonas. Quadratum ergo a p q r continebit pedes 19 $\frac{61}{81}$: & gnomon b q d, hoc est rectangulum t c $\frac{20}{81}$. quod si rursus appositum fuerit ad lineam t o, quæ habet pedes 9 $\frac{4}{9}$: erit o u $\frac{4}{153}$: & h u tota, hoc est a x 4 $\frac{8}{17}$.*

1. sexti
43 primi.
14. sexti.




*OPERATIO.*

Ad latus quadrati proxime minoris addemus, quod producitur ex diuisione excessus, quo propositum quadratum, quadratum proxime minus excedit, per duplum ipsius lateris unà cum eo, quo latus proxime maioris quadrati dictum latus excedit: habebimusq; satis propinquum latus propositi quadrati. Quòd si ad hoc rur

ſum addemus , quod fit ex diuiſione eius, quo propoſitum quadratum excedit quadratum illius propinqui lateris, per duplum eiuſdem, unà cum eo, quo proxime maioris quadrati latus idem ipſum excedit; erit latus illud multo magis propinquum; & ita ſi placuerit, ulterius procedendum erit, cuius exemplum patet ex ante dictis.

*ALITER. Sumatur ſimiliter quadratum proxime minus, ut in ſuperiori figura a e f g: & producatur f g; ex parte quidem f ad lineam b c in h; ex parte autem g ad i: ita ut g i ſit æqualis ipſi g f: & compleatur rectangulum i c. erit i c æquale gnomoni b f d. Quare ſi illud ipſum appoſuerimus ad lineam i f, ut ſit rectangulum i k: erit alterum latus f k, maius latere h c, ut ſuperius eſt demonſtratum: & idcirco e k maior ipſa b c: hoc eſt ipſa a b. ſumatur a l, ipſi e k æqualis: & deſcribatur quadratum a l m n. quod quanquam ſuperat quadratum a b c d, gnomone l c n: eſt tamen ei ſatis propinquum: & latus a l propinquum lateri a b notum fiet. Nam*
5. præmiſ *cum data ſint utraque quadrata a b c d, a e f g: & eorum differentia dabitur, hoc eſt gnomon b f*
ſarum. *d, hoc eſt rectangulum i c. quo quidem appoſito ad lineam datam i f, duplam ſcilicet ipſius a e, & alterum latus f k datum erit. quare & tota e k hoc eſt a l: atque ipſius quadratum a l m n. Rurſus*
quarta. *producatur d c; ex parte c ad q, quæ ſecet lineam l m in o: ita ut ſit o q*
ſexta. *æqualis ipſi c o; ex parte uero d producatur ad p; uſque adeo ut d p æqua*
prima. *lis fiat ipſi d c. erit ergo p q æqualis duplo lateris quadrati a l m n: & completum rectangulum p m æquale gnomoni l c n: eoq; rurſus appoſito ad lineam p q, alterum latus q r minus erit latere o m. reſecetur deinde à linea a l ipſa l s æqualis lineæ q r: erit l s minor l b; quoniam l b, o m inter ſe ſunt æquales. reliqua igitur a s maior eſt ipſa a b. Et cum quadratum a l m n datum ſit: & exceſſus, quo excedit ipſum a b c d dabitur, hoc eſt gnomon l c n, hoc eſt rectangulum p m. eſtq; datum latus p q: & latus alterum datur q r, hoc eſt l s. quare & a s. Deſcribatur inſuper quadratum a s t u: quod ſuperabit quadratū a b c d gnomone ſ c u: et accedet ad ipſum magis, et latus a s magis accedet ad latus a b. ſecet autem c q latus s t in x: & ſumatur x y æqualis ipſi c x: compleaturq; rectangulum p t æquale gnomoni s c u. quo poſt modum appoſito ad lineam p y, ut ſit alterum latus y z, erit eadem ratione & ipſum y z notum; & minus latere x t. ſumpta denique s ω æquali ipſi y z, atque ea ſublata à linea a s, relinquetur a ω latus multo magis propinquum lateri a b. & eodem modo procedemus quoad libuerit. ex quibus apparet latus hoc pacto inuentum ſemper maius eſſe latere propoſiti quadrati. Et ut in eodem exemplo perſiſtamus, Cum quadratum a b c d contineat pedes uiginti, & quadratum a e f g ſexdecim: continebit gnomon b f d, hoc eſt rectangulum i c quatuor pedes. quod quidem ſi appoſuerimus ad lineam i f, duplam ſcilicet lateris a e; erit alterum latus f k pedis dimidium, & a l quatuor pedes & ſemis; cuius quadratum a l m n pedes uiginti & quarta unius pedis. gnomon igitur l c n, hoc eſt rectangulum p m erit pedis quarta: atque eo appoſito ad lineam p q, quæ continet pedes nouem, erit alterum latus q r $\frac{1}{36}$, & a s $4\frac{17}{36}$. quare quadratum a s t u $20\frac{1}{1296}$: & gnomon*

s c u,

*ec u, hoc est rectangulum pt* $\frac{1}{1296}$. *quòd si rursus apponatur ad px, duplum ipsius aω, hoc est ad* 8 $\frac{17}{18}$: *erit yz* $\frac{1}{11592}$: *& aω.* 4 $\frac{32838}{69552}$.

## OPERATIO.

Ad latus quadrati proxime minoris addemus id, quod prouenit ex diuisione excessus, quo dictum quadratum à quadrato proposito exceditur, per duplum eiusdem lateris: eritq; latus illud propinquum primo inuentum. A quo si abstulerimus, quod prouenit ex diuisione eius, quo nuper inuenti lateris quadratum, quadratum propositum excedit, per duplum eius lateris: relinquetur latus magis propinquum. Quòd si ab eo rursus abstulerimus, quod prouenit ex diuisione excessus, quo quadratum lateris postremo inuenti, excedit propositum quadratum, per duplum lateris ipsius: relinquetur latus adhuc magis propinquum: & ita deinceps in cæteris, exemplum colligitur ex iis, quæ proxime dicta sunt.

Ipsa uero e c ad c f proportionem habet eam, quam 265 ad 153.] Ipsa uero e c ad C
c f maiorem proportionẽ habet, quàm 265 ad 153. *Ita legendum est, & corrigendus græcus codex hoc modo.* ἡ δὲ ε γ πρὸς γ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν σ ξ ε πρὸς ρ ν γ. *nam cum quadratum ec sit 70227: erit ipsa e c maior, quàm 265. quare ad c f proportionem maiorem habebit, quàm 265 ad 153. Adde quòd non sequeretur conclusio ea, quæ inferius ponitur. Videlicet e c ad c g maiorem habere proportionem, quàm 571 ad 153.*

Quare e g ad g c eam potestate proportionem habet, quam 349450 ad 23409: E
longitudine uero eam, quam 591 $\frac{1}{8}$ ad 153.] *Et hoc loco, ut opinor, corrigendus est græcus codex, & ita uertendum.*

Quare e g ad g c potestate maiorem habet proportionem, quàm 349450 ad 23409; longitudine uero maiorem, quàm 591 $\frac{1}{8}$ ad 153. *Cum enim e c ad c g maiorem proportionem habeat, quàm 571 ad 153; quod iam demonstratum est: sitq; ipsa c g 153: erit e c maior, quàm 571: & idcirco quadratum eius maius, quàm 326041. quadratum autem c g est 23409. quare c g quadratum, quod est æquale duobus quadratis e c, c g maius erit,* penul.1.
*quàm 349450: & ipsius latus maius, quàm 591* $\frac{1}{8}$. *Ex quibus sequitur e g ad g c potestate maiorem habere proportionem, quàm 349450 ad 23409, longitudine uero maiorem, quàm 591* $\frac{1}{8}$ *ad 153.*

Quare h e ad h c maiorem habet, quàm 1172 $\frac{1}{8}$ ad 153.] *Est enim e c maior, quàm* G
*1162* $\frac{1}{8}$, *ut monstratum est. quare quadratum ipsius maius, quàm 1350534* $\frac{33}{64}$. *& cum quadratum h c sit 23409: erit h e quadratum, quod est æquale duobus illis quadratis, maius, quàm 1373943* $\frac{33}{64}$: *& eius latus h e maius, quàm 1172* $\frac{1}{8}$. *habet ergo h e ad h c proportiouem maiorem, quàm 1172* $\frac{1}{8}$ *ad 153.*

Secetur item h e c angulus bifariam ducta e k. Habet e c ad c k proportionem H
maiorem, quàm 2334 $\frac{1}{4}$ 153.] *Quoniam ut utraque h e, e c ad h c, ita e c ad c k: est autem h e maior, quàm 1172* $\frac{1}{8}$: *& e c maior, quàm 1162* $\frac{1}{8}$, *ut ostensum est: habebit e c ad c k proportionem maiorem, quàm 2334* $\frac{1}{4}$ *ad 153.*

Ipsa uero a c ad c g minorem habet, quàm 3013 $\frac{3}{4}$ ad 780.] *Cum a g ad g c mino-* P
*rem proportionem habeat, quàm 2911 ad 780, posita g c 780: erit a g minor, quàm 2911. quare quadratum eius minus, quàm 8473921. est autem quadratum g c 608400. quadratum igitur a c, quod est æquale duobus quadratis a g, g c minus erit, quàm 9082321: & ipsa a c minor, quàm 3013* $\frac{3}{4}$. *ex quibus constat a c ad c g minorem habere proportionem, quàm 3013* $\frac{3}{4}$ *ad 780.*

Rursus secetur bifariam angulus c a g ducta a h. habet eadem ratione a h ad h Q
c minorem proportionem, quàm 5924 $\frac{3}{4}$ ad 780, uel quàm 1823 ad 240.] *Nam ex septima præmissarum 5924* $\frac{3}{4}$ *ad 780 eandem proportionem habent, quam 23699 ad 3120, hoc est eandem, quam 1823 ad 240; utraque enim utriusque est pars tertia decima. Quòd si h c ponatur 240: erit a h minor, quàm 1823; & quadratum eius minus, quàm 3323329. est autem h c quadratum 57600. utraque igitur quadrata a h, h c minora sunt, quàm 3380929: & propterea quadratum a c, quod illis ipsis est æquale, minus quàm 3380929. sed huius latus minus est, quàm 1838* $\frac{9}{11}$. *ergo & ipsa a c, multo minor erit, quàm 1838* $\frac{9}{11}$: *& ad c h mino-*

*rem habebit proportionem, quàm 1838 $\frac{9}{11}$ ad 240.*

R Secetur item bifariam angulus h a c, ducta k a. ergo & ipsa k a ad k c minorem habet proportionem, quàm 3661 $\frac{9}{11}$ ad 240, uel quàm 1007 ad 663.] *Quam enim proportionem 3661 $\frac{9}{11}$ habent ad 240, eandem habent, ex septima iam dicta, 40280 ad 2640; hoc est 1007 ad 66: utraque enim utriusque est pars quadragesima. posita igitur k c 66, erit ipsa k a minor, quàm 1007: & eius quadratum minus, quàm 1014049, est autem k c quadratum 4356. quare quadratum a c, quod est æquale duobus quadratis a k, k c minus est, quàm 1018405. At uero latus quadrati 1018405 minus est, quàm 1009 $\frac{1}{6}$. Ipsa igitur a c multo minor est, quàm 1009 $\frac{1}{6}$: & idcirco ad c k minorem proportionem habet, quàm 1009 $\frac{1}{6}$ ad 66.*

# FEDERICI COMMANDINI
## IN LIBRVM DE LINEIS SPIRALIBVS.
### COMMENTARIVS.



A PRIMVM problema erat. Sphæra data spatium planum inuenire, quod superficiei sphæræ esset æquale. quod quidem primum à nobis explicatum est in libro, quem de sphæra edidimus, cum enim demonstratum sit, unius cuiusque sphæræ superficiem quadruplam esse maximi circuli &c.] *Demonstratum est hoc in lib. primo de sphæra, et cylindro, propositione trigesima prima.*

B Dato cono, uel cylindro sphæram inuenire ipsi cono, uel cylindro æqualem.] *Resoluitur, componiturq; huiusmodi problema libro secundo de sphæra & cylindro, propositione prima.*

C Datam sphæram plano ita secare, ut portiones eius inter se datam habeant proportionem.] *Libro secundo, propositione quarta.*

D Datam sphæram plano ita secare, ut portiones superficiei eius datam habeant proportionem.] *Propositione tertia eiusdem secundi libri.*

E Datam sphæræ portionem, portioni sphæræ datæ similem facere.] *Propositione quinta eiusdem.*

F Datis duabus siue eiusdem, siue non eiusdem sphæræ portionibus, inuenire portionem sphæræ &c.] *Propositione sexta.*

G A data sphæra portionem plano ita abscindere, ut portio ad conum, cuius basis sit eadem portioni, & altitudo æqualis, datam proportionem habeat, quæ quidem maior sit ea, quam habent tria ad duo.] *Propositione septima. ubi autem in græco codice habetur μὴ μείζονα, expungendum est illud μὴ.*

H Sphæræ nanque maior portio ad minorem, minorem quidem proportionem habet, quàm sit dupla illius &c.] *Propositione octaua.*

I Demonstratum enim est, dimidiam sphæram, maximam esse omnium sphæræ portionum, quæ æquali superficie continentur.] *Propositione nona, & ultima.*

K Figura à sectione coni rectanguli descripta conoides uocetur.] *In libro de conoidibus, & sphæroidibus figuram descriptam à coni rectanguli sectione, conoides rectangulum appellat Archimedes: conoides uero obtusiangulum eam, quæ describitur à sectione conoidis obtusianguli. hoc tamen loco quia de rectanguli coni sectione tantum sermo est: conoides simpliciter appellauit.*

L Quòd si dicta figura secetur plano ad rectos angulos super axem ducto: sectionem eius circulum esse manifestum est.] *Hoc nos uniuerse demonstrabimus contingere in omni conoide, & sphæroide, ex ijs, quæ scribemus in duodecimam libri de conoidibus, & sphæroidibus.*

M Portionem uero abscissam sesquialteram esse coni basim habentis eandem portioni, & æqualem altitudinem, hoc demonstrare oportet.] *Demonstrauit in libro de conoidibus, & sphæroidibus, propositione uigesimatertia.*

N Et si conoidis duæ portiones abscindantur planis quomodocunque ductis, sectiones quidem esse conorum acutiangulorum sectiones perspicuum est.] *Colligitur id ex*

id ex decima tertia l i ri de conoidibus, & sphæroidibus.

Sed portiones habere inter se proportionem eandem, quam habent poteſtate lineæ ab earum uerticibus uſque ad abſcindentia plana æquidiſtantes axi ductæ &c.] Demonſtrauit autem uigeſima ſexta propoſitione eiuſdem. O

Dico iam ſpatium contentum linea ſpirali, & recta in priſtinum locum reſtituta, &c. Huius demonſtratio habetur uigeſima quarta propoſitione huius. P

Si lineam ſpiralem recta linea contigerit in ultimo ipſius ſpiralis termino.] In decimaoctaua huius. Q

Si linea circunducta, punctumq; in ea latum pluribus circulationibus circumferantur, &c.] In uigeſima ſeptima. R

Si in linea ſpirali in una circulatione deſcripta duo puncta ſumantur, &c.] In uigeſima octaua, & ultima. S

Et ſumo in his quoque ea, quæ in aliis libris ſumpta fuere, &c.] In libris ſcilicet de ſphæra, & cylindro, & in libro de quadratura paraboles. T

## IN PROPOSITIONEM I.

Patet igitur eandem habere proportionem c d ad ipſam d e, quam tempus f g ad tempus g h.] Ex diffinitioue ſexta quinti libri elementorum. A

## IN PROPOSITIONEM II.

Manifeſtum eſt igitur eandem habere proportionem c d ad d e, quam habet f g ad g h.] Ex undecima propoſitioue quinti elementorum. A

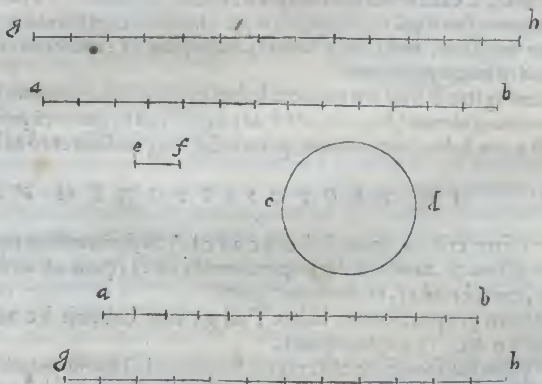
## IN PROPOSITIONEM III.

Circumſcripta enim circa unumquemque circulorum figura multiangula, perſpicuum eſt lineam ex omnibus earum lateribus compoſitam, &c.] Ex iis, quæ in principio libri de ſphæra & cylindro traduntur. A

## IN PROPOSITIONEM IIII.

A

Diuiſa etenim recta linea in tot partes &c.] Sit recta linea a b, quæ excedat circumferentiam c d: & ſit exceſſus liuea e f. coaceruetur autem e f ipſa ſibi ipſi eouſque, quo uſque fiat linea excedens ipſam a b, quæ ſit g h: diuidatur itẽ a b in totidem partes æquales, quot ſunt in linea g h, æquales ipſi exceſſui: manifeſtum eſt, ut a b ad g h, ita eſſe partem lineæ a b ad partem ipſius g h. quare pars lineæ a b minor eſt parte g h; cum a b ſit poſita minor ipſa g h. ſublata autem una ipſius parte à linea a b, relinquetur linea minor quidem, quàm a b, maior uero, quàm circumferentia c d; quoniam ſublata linea minor eſt exceſſu e f. Quòd ſi circumferentia c d excedat lineam rectam a b, exceſſu e f: rurſus eadem omnia fiant, ſicuti 15. v.



*enti prius: erunt partes lineæ a b, partibus g h minores. quare si adiecerimus lineæ a b unam ipsius partem: fiet linea maior quidem, quàm a b; minor uero, quàm circumferentia c d; cum id, quod adiectum est minus sit, quàm excessus e f.*

## IN PROPOSITIONEM V.

A Itaque sumi potest recta linea maior data circumferentia] *Si enim circa datam circumferentiam multorũ angulorum figura circumscribatur: erit eius ambitus circumferentia maior: quod etiam constat ex iis, quæ in principio libri de sphæra, & cylindro habentur.*

B Eandem ergo proportionem habet h f ad h k, quam b h ad h g.] *Nam triangula b h f,*
15. primi. *k h g similia sunt; cum anguli ad h uerticem sint æquales: angulus autem ad f æqualis angulo ad k,*
29. primi. *& qui ad b e i, qui ad g. quare f h ad h b eandem habet proportionem, quam k h ad h g: & permu-*
4. sexti. *tando f h ad h k eandem, quam b h ad h g.*
16. quinti.
C Quare f h ad h k minorem habet, quàm b h circumferentia ad datam circumferen-
8. quinti. tiam.] *Nam recta linea b h, cum sit minor, quàm b h circumferentia, habet ad h g minorem proportionem, quàm circumferentia b h ad datam circumferentiam, quæ posita est etiam minor ipsa h g. erat autem f h ad h k, hoc est ad semidiametrum, ut b h ad h g. quare sequitur per secundam partem duodecimæ quinti ex traditione Campani, f h semidiametrum minorem habere proportionem, quàm circumferentia b h ad datam circumferentiam.*

## IN PROPOSITIONEM VI.

A Erunt triangula c h k, c k l, similia.] *Angulus enim c h k unius est æqualis angulo k c l alte-*
18. tertii. *rius, utrisq; rectis existentibus: angulus uero h c k angulo c k l est æqualis. reliquus igitur angulus*
29. primi. *reliquo angulo est æqualis: & triangulum triangulo simile. Quam ergo proportionem habet c h ad*
4. sexti. *h k, eam habet k c ad c l. sed ex positione f ad g minorem proportionem habet, quàm c h ad h k: quare per duodecimam quinti ex traditione Campani, f ad g minorem habet proportionem, quàm k c ad c l.*

B Quam uero proportionem habet f ad g, habeat k c ad maiorem ipsa c l.] *Cum f ad g minorem habeat proportionem, quàm k c ad c l: si fiat ut f ad g, ita k c ad aliam lineam, quæ sit b n:*
8. quinti. *erit b n maior ipsa c l.*

C Et ponatur b n inter circumferentiam, & rectam lineam, ut trãseat per c: ita enim secari poterit, & cadet extra, cum ipsa sit maior, quàm c l.] *Poterit enim linea b n quantulocumq; maior fuerit ipsa c l, ita aptari, ut per c transiens circũferentiam secet in b puncto. cadet autem extra necessario. nam si intra caderet; aut in ipsam c l: altera eius extremitas circulum non secaret: quod est contra positionem.*

D Quoniam igitur b k ad b n eandem habet proportionem quam f ad g.] *Est enim ob similitudinem triangulorum k b n, e b c, ut b k ad b n, sic b e ad b c, quare cũ posuerimus k c, uel ei æqua-*
11. quinti *lem k b ad b n eam habere proportionem, quam habet f ad g: habebit et e b ad b c eãdem, quam f ad g.*

## IN PROPOSITIONEM VII.

A Maior igitur erit ea, quam habet k c ad c l.] *Ob similitudinem triangulorum c h k, k c l, ut superius dictum est, eandem habet proportionem k c ad c l, quam c h ad h k. quare f ad g minorem habet, quàm k c ad c l, ex duodecima quinti.*

B Quam uero proportionem habet f ad g, eam habebit k c ad minorem ipsa c l. habeat ad i n &c.] *Ex octaua quinti.*

C Potest enim ita secari, & cadet intra lineam c l.] *Rursus poterit linea i n quantulocunque minor ipsa c l ita constitui, ut tendat ad punctum c: sitq; totius lineæ c n pars c i intra circulum, pars uero i n extra. cadet autem intra lineam c l: alioqui circulum ipsum non secaret, ut ponitur,*

D Quoniam igitur eandem habet proportionem k c ad i n, quam f ad g.] *Concluditur hoc ex quarti sexti, & undecima quinti, ut superius apparuit, similibus hoc loco existentibus triangulis k i n, c i e.*

IN

## IN PROPOSITIONEM VIII.

Maior ergo eſt linea x c ipſa c l. *Ex octaua quinti.* A

Deſcribatur circuli circumferentia circa puncta k l x. *Docet id quinta quarti.* B

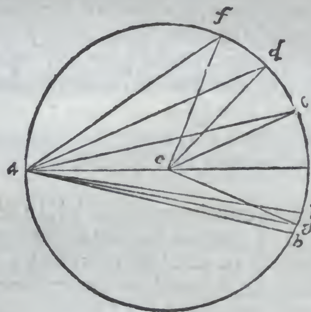
Et quoniam maior eſt x c ipſa c l: & lineæ k c, x l ſecant ſe ſe ad angulos rectos fieri poteſt, ut ducatur linea i n, æqualis ipſi m c, quæ tendat ad k.] *Hoc ideo dixit Archimedes, quoniam ſi linea km ſecaret x l in partes æquales, non poſſet id præſtari, quod uolumus: cum alioqui poſſit, linea x l in partes inæquales diſſecta, ut mox oſtendemus. ſed prius nonnulla præmittere neceſſarium eſt.* C

Si in circumferentia circuli aliquod ſumatur punctum: ab eoq; in circulum ducantur rectæ lineæ; quæ per centrum tranſit omnium erit maxima: aliarum uero, quæ tranſeunti per centrum propinquiores ſunt, remotioribus erunt maiores: duæ autem tantum æquales ſunt ad utraſque partes maximæ.

*Hæc omnia ſatis patere poſſent ex ijs, quæ afferuntur ad demonſtrationem ſeptimæ, & octauæ tertij elementorum, ſed tamen nequid deſideretur, nos breuiter monſtrare curabimus.*

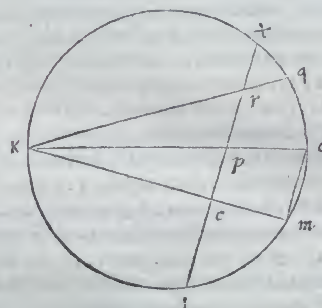
*SIT circulus a b c d, cuius centrum e: & in circumferentia ipſius ſumpto aliquo puncto a, ab eo in circulum ducantur rectæ lineæ a b, a c, a d, a f: ſitq; a b per centrum ducta. dico ipſam eſſe omnium maximam: a c uero maiorem eſſe, quàm a d: & a d maiorem, quàm a f. connectantur e c, e d, e f. erunt trianguli a e c duo latera a e, e c maiora reliquo a c: ſed dicta duo latera inter ſe iuncta, ſunt æqualia lineæ a b. ergo linea a b eſt maior linea a c. & eadem ratione maior quibuslibet alijs in circulum ductis. Rurſus trianguli a e c duo latera a e, e c ſunt æqualia duobus lateribus a e, e d trianguli a e d: & angulus a e c maior eſt angulo a e d. baſis igitur a c baſi a d maior erit. Non alia ratione monſtrabimus lineam a d eſſe maiorem ipſa a f: & a f ipſa ſubſequente: & ita deinceps in ceteris. Dico præterea cuilibet ipſarum a c, a d, a f unam tantum dari æqualem ex altera parte ipſius a b. Itaque ad datam lineam a b, datumq; in ea punctum a, conſtituatur angulus b a g æqualis angulo b a c: & ducta linea e g, quæ eſt æqualis ipſi e a: erit angulus e g a æqualis angulo e a g: & pariter in triangulo a e c angulus e c a æqualis angulo e a c. angulus autem e a g factus eſt æqualis angulo e a c. quare & angulus ad g angulo ad c erit æqualis: & reliquus reliquo. baſis igitur a g baſi a c æqualis erit. Solam autem a g æqualem eſſe ipſi a c, ſic patet. Si enim poſſit dari alia æqualis, uel ea erit ultra a g, uel citra. ſit primum ultra, & ſit a h. ergo cum duæ lineæ a g, a h ſint eidem æquales: erunt quoque inter ſe æquales: quod fieri non poteſt; ſuperius nanque monſtratum eſt, propinquiores ipſi a b maiores eſſe. Quòd ſi ſit citra a g, ut a k: ſequetur a g æqualem eſſe ipſi a k, maiorem minori: quod item fieri non poteſt. non ergo datur alia æqualis ipſi a c, præter unam a g. Eodem quoque modo monſtrabimus, & ipſis a d, a f unam tantum dari æqualem. His ita demonſtratis, dico ſi linea k m ad angulos rectos occurrens lineæ x l, ipſam ſecet in partes æquales, fieri non poſſe, ut a puncto k ad circumferentiam x m l alia linea ducatur, cuius pars interiecta inter circumferentiam, & lineam x l ſit æqualis ipſi c m. ſi enim fieri poſſit, conſtituantur omnia, ſicut dictum eſt: ſitq; ea linea k o ſecans x l in p. erit igitur p o æqualis ipſi c m. & quoniam in triangulo k c p angulus ad c eſt rectus: linea k p maior erit linea k c. ergo per communem conceptionem, & linea k p o maior erit linea k c m: quod eſt abſurdum. nam linea k c m, quæ per centrum tranſit, monſtrata eſt omnium eſſe maxima. non igitur eo pacto duci poterit linea alia, quæ ſit æqualis ipſi c m. Rurſus dico, ſi k m ſecet lineam x l in partes inæquales: idem illud, quod proponebatur, recte præſtari poſſe. Fiant omnia, ut dictum eſt, iam monſtrabimus à puncto k ad circumferentiam ductis lineis, conſtitui poſſe minorem ip a c m: & item maiorem. quare & ei æqualem conſtituere, nihil erit, quod prohibeat.*

20. primi. 24. primi. 23. primi. 5. primi. 19. primi. 1. tertii.




conſtat

*constat autem ipsam nunc km per centrum non transire: alioqui cum secet x l ad angulos rectos;*
3. tertii. *secaret qnoque & in partes æquales, quod non possumus. Itaque ab eodem puncto k per centrum alia linea ducatur k o occurrens x l in p: & ad datam lineam k o, datumq; in ea punctum k fiat angulus æqualis angulo m k o; qui sit o k q: secet autem linea k q lineam x l in puncto r: erit iam linea r q minor ipsa c m: & p o maior eadem: patet enim ex proxime demonstratis, lineam k q æqualem esse lineæ k m. sed cum in triangulo k c r, angulus ad c sit rectus: erit linea k r maior ipsa k c. quare relinquitur r q esse minorem ipsa c m. Eadem ratione monstrabimus si à puncto k ducantur aliæ lineæ ad circumferentiam x q: earum partes inter circumferentiam, atque lineam x l comprehensas multo minores esse ipsa c m. Iungantur*
31. tertii. *deinde m o. erit angulus k m o in semicirculo rectus.*
28. primi. *quòd cum etiam rectus sit k c p: linea m o æqui-*
2. sexti. *distans erit lineæ c p. quare ut k p ad p o, sic k c ad c m, est autem k p maior, quàm k c; cum an-*
14. quinti. *gulus ad c sit rectus. ergo & p o maior erit, quàm c m: quod monstrare oportebat. similiter quoque monstrabimus, si à puncto k ad circumferentiam o m aliæ ducantur lineæ, dictas partes esse maiores ipsa c m. Constat igitur fieri posse, ut à puncto k ducatur linea ad circumferentiam x m l cuius pars inter ipsam, & lineam x l interiecta sit æqualis lineæ c m, atque ipsam quidem cadere in aliquod punctum circumferentiæ o q.*




D Et quod continetur lineis k i, i n ad contentum ipsis k i c l eandem habet, quam i n ad c l.] *Addenda hæc sunt in græco codice*, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ι ν πρὸς γ λ.

E Quare & i n ad c l est, ut x i ad k e.] *Quoniam enim rectangulum contentũ lineis x i, i l ad*
1. sexti. *contentum k e, i l eam habet proportionem, quam linea x i ad lineam k e: & contentum lineis*
35. tertii. *k i, i n ad contentum k i, c l habet eam, quam linea i n ad lineam c l: contentum autem x i, i l æquale est contento k i, i n; & contentum k e, i l æquale contento k i, c l, ut monstrabitur: erit linea i n, uel c m, ipsi æqualis ad c l, ut x i ad k e. Sunt enim triangula k i l, e i c æquiangula, ut patet; nam angulus ad i communis utrisque est, linea autem k l æquidistat lineæ e c.*
19. quinti. *quare ut k i ad i l, sic e i ad i c, & reliqua k e ad reliquam c l erit, ut k i ad i l. rectangu-*
16. sexti. *gulum igitur contentum lineis k e, i l æquale erit contento lineis k i, c l.*

F Et propterea c m ad c l, & x c ad k c, & ad k b est, ut x i ad k e: & reliqua i c ad b e, & c.] *Contentum enim lineis m e, c k rectangulum æquale est contento ipsis l c, c x:*
16. sexti. *& propterea c m ad c l est, ut x c ad k c, uel ad k b æqualem ipsi k c. erat autem c m ad c l,*
11. quinti. *ut x i ad k e. ergo x c ad k b erit, ut x i ad k c: & reliqua i c ad b e reliquam, ut x c ad k*
19. quinti. *b, uel ad k c. sed x c ad c k eandem habet proportionem, quam g ad f, ut posuimus. & i c ad b e eandem habebit, quam g ad f: & conuertendo b e ad i c eandem, quam f ad g.*

## IN PROPOSITIONEM IX.

A Quoniam igitur x c minor est c l: & ipsæ k m, x c secant sese ad angulos rectos: poterit duci linea i n æqualis lineæ c m, quæ tendat ad k.] *Hoc patet fieri posse ex ijs, quæ superius demonstrata sunt.*

B Et contento l i, k e æquale contentum k i, c l. propterea quòd est, ut k e ad l c, ita

c, ita k i ad l i.] Hæc ita legenda ſunt, & græcus codex corrigendus. Nam cum triangula k i l,
e i c ſint æquiangula: erit k i ad i l, ut e i ad i c: & permutando k i ad i e, ut l i ad i c: &
componendo k e ad i e, ut l c ad i c; & rurſus permutando k e ad l c, ut i e ad i c. quare & 19.quinti.
reliqua k i ad reliquam l i, ut k e ad l c. rectangulum igitur contentum lineis k i, l c æquale 16. ſexti.
eſt ei, quod continetur lineis l i k e.

Erit & ut x i ad k e, ita rectangulum lineis k i, i n contentum, ad contentum C
ipſis k i, c l. &c.] Cum enim (ut iam dictum eſt) rectangulum contentum lineis x i, i l ad con
tentum ipſis l i, k e eam habeat proportionem, quam linea x i ad k e: contentum autem k i, i n
ad conteutum k i, c l eandem habeat, quam contentum x i, i l ad contentum l i, k e: nanque
eſt primum rectangulum æquale tertio, & ſecundum quarto, ut monſtrauimus: ſequitur, ut quam 11.quinti.
proportionem habet linea x i ad k e, eam habeat contentum k i, i n ad contentum k i, c l. con-
tentum autem k i, i n ad contentum k i, c l eam habet, quam linea n i ad c l. quare ut x i ad
k e, ita n i, uel ei æqualis c m ad c l. ſed ut c m ad c l, ita x c ad k c, uel ad k b ipſi k c æqua- 16. ſexti.
lem: quoniam rectangulum k c m, eſt æquale rectangulo l c x. ut igitur x i ad k e, ita x c ad k b: 35. tertii.
& reliqua i c ad reliquam b e, ut x i ad k e, & ut x c ad c b, uel ad k c, ei æqualem. Erat au- 19.quinti.
tem g ad f, ut x c ad k c. quare i c ad b e eandem habet proportionem, quam g ad f: & con-
uertendo b e ad i c eandem, quam f ad g.

## IN PROPOSITIONEM X.

Eſt enim quadratum b i æquale quadratis i, b, & duobus, quæ b i continentur, A
rectangulis.] Hoc manifeſtum eſt ex quarta ſecundi elementorũ, et alia eiuſmodi, quæ ſequuntur.

Quadrata igitur a b c d e f g h: & quadrata i k l m n o unà cum quadrato a dupla B
ſunt quadratorum a b c d e f g h.] Nam in antecedentibus bis ſumuntur quadrata ſingula-
rum linearum. ſumitur enim bis quadratum a. & quadratum b bis; quòd quadratum o ſit æqua-
le ipſi b: & eodem modo quadratum c; quòd x ſit æquale ipſi c: & ita in reliquis. ſunt enim qua-
drata n & d æqualia; & item m & e: l & f: k & g: i & h, cum lineæ ipſæ poſitæ ſint æquales.

Quod autem reliquum eſt, oſtendemus uidelicet dupla eorum, quæ partibus u- C
niuſcuiuſque lineæ æqualis ipſi a continentur, unà cum eo, quod continetur h li-
nea, & linea æquali omnibus a b c d e f g h æqualia eſſe quadratis a b c d e f g h. &c.]
Oſtenſum antea eſt quadrata linearum b i, c k, d l, e m, f n, g x, h o eſſe æqualia his omni-
bus, uidelicet quadratis partium uniuſcuiuſque lineæ, & duplis rectangulorum, quæ illis partibus
continentur. Et præterea oſtenſum eſt, quadrata a b c d e f g h; & quadrata i k l m n x o, unà
cum quadrato a eſſe dupla quadratorum a b c d e f g h. Quare ſi deinceps oſtenderimus reliqua, hoc
eſt dupla rectangulorum, quæ continentur partibus uniuſcuiuſque lineæ æqualis ipſi a, unà cum re-
ctangulo contento linea h, & linea æquali omnibus a b c d e f g h, eſſe æqualia iiſdem quadratis
a b c d e f g h: quod uolumus, erit pleniſſime demonſtratum. nanque omnia antecedentia, quæ
quidem ſunt æqualia quadratis linearum omnium, hoc eſt ipſius a, & reliquarum ei æqualium, unà
cum quadrato a, & eo, quod continetur h, & linea æquali omnibus a b c d e f g h, conſequen-
tium, hoc eſt quadratorum a b c d e f g h tripla erunt.

Quoniam enim duo, quæ lineis b i continentur, æqualia ſunt duobus contentis D
b h.] Hoc eſt rectangulo contento h, & dupla ipſius b, ex prima ſexti.

Et duo, quæ continentur k c æqualia ſunt contento h, & quadrupla ipſius c, quia E
k eſt dupla ipſius h] Cum k ſit dupla ipſius h: ſumatur alia linea ipſius c dupla, quæ ſit p. ha
bebit h ad k eandem proportionem, quam c ad p. quare rectangulum contentum h p æquale 16. ſexti.
erit contento k c: & duplum rectanguli h p æquale duplo rectanguli k c. ſed duplum rectanguli 1. ſexti.
h p eſt æquale ei, quod continetur h, & dupla ipſius p, hoc eſt quadrupla ipſius c. duplum igitur
rectanguli k c eſt æquale contento h, & quadrupla ipſius c. Et eadem ratione duplum rectanguli
l d æquale monſtrabitur contento h, & ſexcupla ipſius d; quòd l tripla ſit ipſius h: et ita in reliquis.

Omnia rectangula unà cum eo, quod continetur linea h, & linea æquali omnibus F
a b c d e f g h, æqualia erunt contento linea h, & linea æquali his omnibus uidelicet
ipſi a, & triplæ b, &c.] Omnia ſcilicet rectangula conſequentia, de quibus ultimo loco dictum
eſt, hoc eſt rectangulum contentum linea h, & dupla ipſius b: contentum h, & quadrupla c: con-
tentum h & ſexcupla d: contentum h, & octupla e: contentum h & decupla f: contentum h, &

*duodecupla g: contentum h, & quaterdecupla eiusdem: & contentum h & linea æquali omnibus*
1. sexti. *a b c d e f g h. Hæc (inquam) omnia sunt æqualia rectangulo contento linea h, & linea æquali his omnibus; lineæ scilicet a, triplæ b, quincuplæ c, septuplæ d, nonuplæ e, undecuplæ f, tredecuplæ g, & quindecuplæ h; nam altitudinem habent eandem lineam h, bases uero omnes uni basi æquales. Quare omnia antecedentia, hoc est dupla rectangulorum partibus uniuscuiusque lineæ æqualis ipsi a contentorum, unà cum rectangulo contento h & linea æquali omnibus a b c d e f g h, sunt uni rectangulo iam dicto æqualia. sed eidem æqualia sunt quadrata a b c d e f g h, ut mox ostendetur. antecedentia igitur omnia æqualia sunt quadratis a b c d e f g h.*

G Nam quadratum a est æquale contento h linea, & linea æquali his omnibus uidelicet ipsi a, & reliquis, quarum unaquæque est æqualis ipsi a.] *Tres nanque lineæ h, a,*
17. sexti. *& composita ex a & ceteris ei æqualibus, sunt proportionales. quare quadratum a est æquale rectangulo contento linea h, & linea composita iam dicta. hoc autem rectangulum æquale est ei, quod continetur linea h, & linea composita ex his omnibus; uidelicet linea a, & dupla linearum b c d e f g h: quòd lineæ æquales a, dempta ipsa a, duplæ sunt linearum b c d e f g h. est enim o posita æqualis ipsi b: & x ipsi c: & n, d: & m, e: & l, f: & k, g: & i, h. Quadratum igitur a æquale est rectangulo contento linea h, & linea composita ex a, & dupla linearum b c d e f g h. Rursus quoniam proportionales sunt tres lineæ h, b, & composita ex b & reliquis ipsi b æqualibus; hoc est composita ex b, & dupla reliquarum c d e f g h: erit quadratum b æquale contento linea h, & composita ex b, & dupla ipsarum c d e f g h: & eodem modo in ceteris ratiocinati, tandem colligemus rectangula omnia, quæ sunt æqualia quadratis a b c d e f g h esse quoque æqualia uni rectangulo contento linea h, & æquali his omnibus; ipsi a, triplæ b, quincuplæ c, septuplæ d, nonuplæ e, undecuplæ f, tredecuplæ g, & quindecuplæ h. Quare quadrata a b c d e f g h eidem illi rectangulo æqualia esse, nemo sane dubitare poterit; quod unum restabat ostendendum.*

H Ex quibus colligitur, quadrata omnia linearum æqualium maximæ &c.] *Hoc est quadrata linearum a, b i, c k, d l, e m, f n, g x, & h o minora sunt, quàm tripla quadratorum a b c d e f g h. demptis enim ex illis, quæ horum tripla sunt; quadrato scilicet a, & rectangulo contento linea h, & linea æquali omnibus a b c d e f g h, reliqua minora erunt, quàm tripla eorundem quadratorum.*

I Reliquorum autem dempto maximæ quadrato, maiora, quàm tripla.] *Quadratum enim a, & rectangulum contentum linea h & æquali ipsis a b c d e f g h, quæ quidem ex antecedentibus demuntur; minora sunt, quàm tripla quadrati a, quod ex consequentibus demptum est, quippe cum rectangulum dictum minus sit quadrato ipsius a, ut superius est demonstratum.*

K Et propterea si similes figuræ describantur ab omnibus &c.] *Constat hoc ex corollario uigesimæ sexti, græcus autem codex ita corrigendus.* τὰ εἴδεα ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίστα, τῶν μὲν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν εἰδέων ἐλάσσονα ἐσσεῦνται, ἢ τριπλάσια.

## IN PROPOSITIONEM XI.

A Quare & omnia quadrata linearum o d, p f, r h, s k, t m, y x ad omnia contenta linea n x &c.] *Ex duodecima quinti.*

B Itaque contentum linea n x, & æquali omnibus o d, p f, r h, s k, t m, y x.] *Concluditur hoc ex prima sexti. nam tertiæ partes quadratorum o q, p ζ, r ϑ, s λ, t ϥ, y n, communes utrisque sunt, rectangulum uero contentum n x, & linea æquali omnibus o d, p f, r h, s k, t m, y x cum altitudinem habeat lineam n x, basim uero æqualem his omnibus, æquale erit quadratis linearum q d, ζ f, ϑ h, λ k, ϥ m, n x; & rectangulo, cuius altitudo n x, basis uero linea æqualis omnibus o q, p ζ, r ϑ, s λ, t ϥ, y n: altitudo enim utrobique eadẽ est, bases uero omnes uni basi æquales.*

C Quadrata uero a b, c d, e f, g h, i k, l m æqualia sunt quadratis b u, q d, z f, ϑ h,
4. secundi λ k, ϥ m, &c.] *Nam quadratum a b æquale est quadratis b u, a u, & duplo eius, quod conti-*
1. sexti. *netur b u, a u, hoc est ei, quod continetur b u & dupla a u: & eodem modo quadratum c d æquale est quadratis q d, c q; & contento q d & dupla c q: & ita in reliquis. quare omnia antecedentia omnibus consequentibus æqualia sunt, ut proponitur.*

D Communia igitur utrisque sunt quadrata linearum æqualium ipsi n x: contentũ autẽ linea n x, & æquali omnibus o q, p z, ϑ r, λ s, ϥ t, y n minus est contento b u &c.] *Monstrauit primum Archimedes spatia hæc omnia, uidelicet rectangulum contentum linea n x, & æquali*

æquali ipsis od, pf, rh, sk, tm, yx; & tertiam partem quadratorum oq, pζ, r9, sλ, tч, A
yn esse æqualia his omnibus, uidelicet quadratis qd, ζf, 9h, λk, чm, nx; & rectangulo con- B
tento nx & linea æquali oq, pζ, r9, sλ, tч, yn & tertiæ parti quadratorum oq, pζ, r9,
sλ, tч, yn. Deinde monstrauit quadrata ab, cd, ef, gh, ik, lm omnia æqualia esse his qua- C
dratis, uidelicet bu, dq, fζ, h9, kλ, mч; & quadratis au, cq, eζ, g9, iλ, lч; & rectan D
gulo contento bu, & linea composita ex dupla au, cq, eζ, g9, iλ, lч. Vocentur autem prima omnia, ut breuitati consulamus, spatia A, secnuda B, tertia C, quarta D. erunt ergo spatia A spatijs B æqualia: spatia uero C æqualia spatijs D. Aggreditur nunc monstrare spatia B minora esse spatijs D, ut ex hoc postea inferat spatia quoque A spatijs C esse minora. Illud uero sic monstrabitur. Nam quadrata qd, ζf, 9h, λk, чm, nx sunt æqualia quadratis bu, qd, ζf, 9h, λk, чm; cum totidem utrobique sint quadrata ex iisdem, uel æqualibus lineis orta: rectangulum uero contentum linea nx, & æquali omnibus oq, pζ, r9, λs, tч, yn minus est rectangulo contento linea bu, & linea æquali duplo harum omnium au, cq, eζ, g9, iλ, lч, quòd duplum harum linearum excedat lineas oq, pζ, r9, sλ, tч, yn, excessu lineæ au. est enim duplum linearum cq, eζ, g9, iλ, lч æquale lineis oq, pζ, r9, sλ, tч; & linea au æqualis lineæ yn. quare rectangulum consequens cum assumat in basi duplum ipsius lineæ au: excedit antecedens spatio contento lineis au, bu. Præterea tertia pars quadratorum oq, pζ, r9, sλ, tч, yn est etiam minor quadratis au, cq, eζ, g9, iλ, lч; ex eo, quod in superiori propositione ab Archimede monstratum est, nempe quadrata linearum æqualium maximæ minora esse, quàm tripla quadratorum linearum se se æqualiter excedentium. constat igitur spatia B minora esse spatijs D: & idcirco spatia A spatijs C minora erunt. græcus autem codex ita restituendus est. καὶ τὰ τετράγωνα δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ч μείζονα ἐστὶ τοῦ τρίτου μέρους τῶν τετραγώνων, τῶν ἀπὸ τᾶν ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ч, υ ν &c. & paulo post. πάλιν δὴ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ν ξ, ἴσα ἐντὶ τοῖς τε ἀπὸ τᾶν γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ч, καὶ τοῖς ἀπὸ τᾶν χ δ, ψ ζ, ω ϑ, λ κ, ч μ, ν ξ.

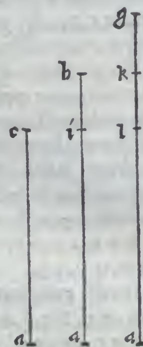
Quod autem reliquum est, ostendemus; maiora scilicet esse quadratis cd, ef, E
gh, ik, lm, nx, &c.] Rursus uult ostendere Archimedes spatia A; hoc est rectangulum contentum linea nx, & æquali omnibus od, pf, rh, sk, tm, yx; & tertiam partem quadratorum
oq, pζ, r9, sλ, tч, yn, maiora esse quadratis cd, ef, gh, ik, lm, nx. ad quod assumit qua E
drata cd, ef, gh, ik, lm, nx esse æqualia quadratis cq, eζ, g9, iλ, lч; & quadratis qd, ζ F
f, 9h, λk, чm, nx; & rectangulo contento linea nx, & æquali duplæ linearum cq, eζ, g9, iλ, lч. id, quod apparet manifestissime ex quarta secundi. Sed dicantur causa breuitatis spatia illa E, hæc autem spatia F.

Suntq; communia quadrata qd, zf, 9h, λk, чm, nx; & contentum linea nx &c.]. F
Cum antea ostensum fuerit spatia A esse æqualia spatijs B: spatia autem E spatijs F æqualia: si nunc ostenderimus, spatia B esse maiora spatijs F: erunt quoque spatia A ipsis E maiora. Quadrata enim qd, ζf, 9h, λk, чm, nx sunt utrisque communia; & rectangulum, quod continetur linea nx, & æquali omnibus oq, pζ, r9, sλ, tч, yn maius est rectangulo contento nx, & æquali duplæ linearum cq, eζ, g9, iλ, lч; nanque earum dupla est æqualis lineis oq, pζ, r9, sλ, tч. quare basis antecedentis rectanguli excedit basim consequentis, linea yn: & rectangulum excedit rectangulum, spatio ynx. Quadrata uero oq, pζ, r9, sλ, tч, yn maiora sunt, quàm tripla quadratorum cq, eζ, g9, iλ, lч: & idcirco tertia illorum pars, his quadratis maior est; quòd paulo ante fuerit ostensum, quadrata linearum æqualium maximæ, quadratorum ex lineis se se æqualiter excedentibus, dempto maximæ quadrato, maiora esse, quàm tripla. relinquitur ergo rectangulum contentum linea nx, & æquali omnibus omnibus od, pf, rh, sk, tm, yx unà cum tertia parte quadratorum oq, pζ, r9, sλ, tч, yn, maius esse quadratis cd, ef, gh, ik, lm, nx. In hunc usque locum processit Archimedes nullum eorum, quæ proposuit, manifeste concludens, nisi fortasse aliqua desiderentur. At nos illud ipsum facile assequemur ex iis, quæ ante monstrata sunt. monstratum nanque est, quadrata linearum od, pf, rh, sk, tm, yx, quæ sunt quadrata linearum æqualium maximæ ad spatia A eam habere proportionem, quam quadratum ab lineæ maximæ ad rectangulum abu; & tertiam partem quadrati au. simul & illud monstratum est, spatia A esse minora spatijs C. quare ex 8. & 13. quinti concluditur primum, uidelicet quadrata linearum æqualium maximæ ad spatia C, hoc est ad quadrata ab, cd, ef, gh, ik, lm linearum se se æqualiter excedentium, dempta minima, minorem habere proportionem, quàm qua-

*dratum a b lineæ maximæ ad rectangulum a b u; & tertiam partem quadrati a u, hoc est ad id, quod est æquale utrisque; rectangulo contento linea maxima, & minima; & tertiæ parti quadrati excessus, quo maxima minimam excedit. Rursus quoniam monstrata sunt spatia A maiora spatijs E: ex eisdem colligitur secundum, quadrata linearum æqualium maximæ ad spatia E, hoc est ad quadrata linearum se se æqualiter excedentium dempta maxima, maiorem habere proportionem, quàm quadratum lineæ maximæ ad rectangulum maxima, minimaq; linea contentum; & ad tertiam partem quadrati eius lineæ, qua maxima excedit minimam: quæ omnia ostendisse oportebat. Corollarium patet ex iam dictis, & corollario uigesimæ sexti elementorum.*

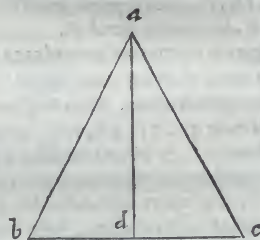
## IN PROPOSITIONEM XIII.

A Etidcirco a g, a c sunt ipsius a h duplæ. *Hoc manifeste apparere potest, cum id, quo linea a g excedit lineam a c, sit duplum eius, quo linea a h excedit eandem a c. sed ut res manifestior fiat, ponantur tres lineæ a c, a h, a g, se se æqualiter excedentes, & excessus, quo linea a h excedit a c, sit i h; quo autem linea a g excedit a h, sit k g: & abscindatur ab ipsa k a, linea æqualis, k g, quæ sit k l. perspicuum est lineam l g duplam esse ipsius i h: & lineas a c, a i, a l inter se se æquales; proptereaq; duas lineas a c, a l duplas ipsius a i. Duæ igitur a c, a l ipsius a* 1.quinti. *i æque multiplices sunt, atque l g ipsius i h; nempe duplæ. quare & lineæ a c, a l, l g, linearum a i, i h; hoc est, a c, a g, ipsius a h duplæ sunt; quod monstrare oportebat.*

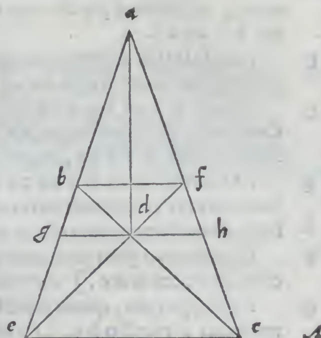



B Sed eius lineæ, quæ in triangulo bifariam diuidit angulum c a g, ipsæ a g, a c maiores sunt, quàm duplæ.] *Si enim trianguli angulus bifariam diuidatur: diuidens autem linea producatur usque ad basim: duo trianguli latera maiora erunt, quàm dupla ipsius diuidentis; quod nos ita monstrabimus.*

*SIT triangulum a b c: & sit a d linea diuidens angulum b a c bifariam. Dico latera a b, a c maiora esse, quàm dupla ipsius a d. Itaque triangulum, uel duo latera habebit æqualia, uel inæqualia. habeat primo æqualia. erunt iam duo* 4. primi. *triangula a b d, a c d æqualia, & similia inter se: nanque angulus a b c æqualis est angulo a c d: & b a d æqualis ipsi* 32. primi. *c a d. quare & reliquus angulus a d b reliquo a d c æqua-* 13. *lis: & uterque rectus. ergo linea a b maior est ipsa a d;* 18. *cum maiori angulo subtendatur. eadem quoque ratione & linea a c maior ipsa a d. duæ igitur lineæ a b, a c maiores sunt, quàm duplæ ipsius a d. Si uero triangulum latera habeat inæqualia sit, ut in alia figura, latus a c maius latere a b: & producatur a b usque ad e; ita ut fiat æquale lateri a c: iungantur quoque e c: & per punctum b ducatur linea b f æquidistans ipsi e c: itemq; per d alia ducatur eidem æquidistans, quæ sit g d h: & iungantur e f. perspicuum est igitur, propter similitudinem triangulorum a e c, a g h, lineas a g, a h æquales esse. quare trianguli æquicruris a g h duo latera a g, a h maiora erunt, quàm dupla ipsius a d, ex ijs, quæ proxime monstrata sunt. Quòd si monstrauerimus, lineas a b, a c trianguli a b c maiores esse lineis a g, a h: manifeste patebit, quod proponebatur. In hac enim dispositione multa fieri triangula, æqualia inter se, & similia, neminem latere potest, qui elementorum libros recte perceperit. è quorum numero triangulum b d e æquale est, & simile triangulo f d c: & triangulum b d g triangulo f d h: & denique g d e ipsi h d c. constat præterea lineam g h duos angulos,* 15. primi. *qui sunt ad d uidelicet b d e, f d c bifariam secare; cum angulus g d c sit æqualis angulo f d h: &* 3. sexti. *propterea angulo b d g: & similiter angulus h d c sit æqualis angulo b d g, hoc est ipsi f d h. Sed & illud constat. cum linea a d secet angulum b a c bifariam, basis portiones eandem proportionem habere, quàm reliqua ipsius trianguli latera; hoc est c d ad d b esse, ut a c ad a b. quòd cum linea*



*linea a c posita sit maior ipsa a b: erit & c d maior ipsa d b. eadem quoque ratione in triangulo f d c, cuius angulus ad d bifariam secatur ipsa d h, erit c h ad h f, ut c d ad d f; hoc est ad b d, erit igitur c h maior ipsa h f. quare linea composita ex dupla ipsius a b, & ipsis f h, h c, maior erit composita ex dupla eiusdem a b, & dupla f h. At uero lineæ primæ compositæ æquales sunt duæ lineæ a b, a c; cum a f sit æqualis ipsi a b: secundæ autem sunt æquales duæ lineæ a g, a h; quòd b g ipsi f h sit æqualis. ergo duæ lineæ a b, a c duabus lineis a g, a h sunt maiores. ex quibus sequitur, lineas a b, a c multo maiores esse, quàm duplas ipsius a d: quod monstrare uolebamus.*




### IN PROPOSITIONEM XVI.

Necessarium igitur est circuli huius circumferentiam, quæ ad præcedentia habetur intra lineam spiralem cadere; quæ uero ad sequentia, extra.] *Hoc est circumferentiam eam, quæ à d puncto uersus præcedentia habetur, quæ est d r t intra spiralem lineam cadere; quæ uero habetur ab eodem puncto uersus consequentia, hoc est d n t, extra.* A

Angulum uero a d f non esse acutum constat, quia maior est angulo semicirculi.] *Ostensum est in decima sexta tertij elementorum, semicirculi angulum omni angulo acuto rectilineo esse maiorem, hoc est eum, qui diametro, & circuli circumferentia continetur. Quare si angulus a d r omni acuto rectilineo maior est: necessario sequitur, angulum a d f rectilineum, cum eo maior sit, quòd linea d f extra circulum cadat, nullo pacto esse acutum.* B

Quare ab a puncto ad contingentem potest recta linea duci; ita ut eius pars, &c.] *Hoc quomodo fieri possit, docet ipse in quinta huius.* C

Et tota igitur i a ad a r minorem proportionem habet, quàm circumferentia r d n t ad d n t circumferentiam.] *Per compositam scilicet rationem, ex uigesima octaua quinti apud Campanum.* D

Hoc est quam s g k h circumferentia ad circumferentiam g k h.] *Est enim ut angulus r a d ad ipsum d a t, ita circumferentia r d ad circumferentiam d n t: & ita circumferentia s g ad circumferentiam g k h. quare ut circumferentia r d ad circumferentiam d n t, ita circumferentia s g ad ipsam g k h: & componendo, ut circumferentia r d n t ad circumferentiam d n t, ita circumferentia s g k h ad circumferentiam g k h.* E ult. sexti. 11. quinti.

Vt ostensum est.] *Videlicet in decima quarta huius.* F

Quod fieri minime potest, cum sit r a æqualis a d.] *Vide ne codex græcus mendosus sit, cui hæc uerba desint, μείζων δὲ ά ι α τᾶς α λ, hoc est, maior autem i a ipsa a l. sequitur absurdum ex octaua quinti; nanque a i cum sit maior ipsa a l: maiorem habet proportionem ad a r, quàm a l ad eandem, siue ad ei æqualem a d; cuius oppositum sequebatur ex ante dictis.* G

### IN PROPOSITIONEM XVIII.

Et sumatur linea quædam recta l a, minor quidem, quàm f a, maior uero, quàm circumferentia circuli h k g.] *Id, quo pacto fiat, docetur quarta huius.* A

Proportioq́;, quàm habet h a ad a l minor est ea, quam habet dimidia g h ad lineam a b a puncto ad ipsam g h perpendiculariter ductam; quoniam & maior est ea, quam habet h a ad a f.] *Proportio enim, quam habet h a ad a l maior est ea, quam habet h a ad a f. at dimidium lineæ h g ad lineam a b a puncto ad ipsam h g perpendiculariter ductam, habet eam proportionem, quam h a ad a f, ut monstrabitur. ergo & proportio, quam habet h a ad a l, maior est proportione, quam habet dimidium h g ad lineam a b a puncto ad ipsam g h perpendiculariter ductam. Illud autem monstrabitur ad hunc modum. ducatur a b a ad ipsam h g perpendicularis a i. constat lineam a i diuidere ipsam h g in partes æquales: & triangu-* B 8. quinti. 13. quinti. 3. tertii.

*lum*

32. primi. *lum a i h triangulo f a h, esse æquiangulum: cum angulus ad h sit communis; angulus uero f a h*
4. sexti. *æqualis angulo a i h; quorum uterque est rectus. habet igitur linea i h ad i a; hoc est dimidium lineæ h g ad lineam à puncto a ad h g perpendiculariter ductam proportionem eandem, quam linea h a ad a f.*

C Potest igitur à puncto a duci ad productam linea a n: ita ut n r quæ interiicitur inter circumferentiam &c.] *Ex septima huius.*

D Quare n r ad r a eam habebit proportionem, quam h r recta ad ipsam a l.] *Cum enim posuerimus lineam n r ad h r habere proportionem eam, quam linea h a ad a l: & permutando linea n r ad h a, siue ad r a, ipsi æqualem, eam habebit, quam h r ad a l.*

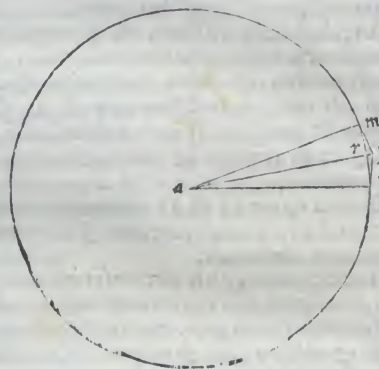
E Et idcirco tota n a ad a r minorem habebit, quam h r circumferentia unà cum tota circuli circumferentia ad circumferentiam circuli h g k.] *Per compositam uide licet rationem ex uigesima octaua quinti.*

F Quam uero proportionem habet circumferentia h r una cum tota circuli h g k circumferentia &c.] *Patet hoc ex decima quinta huius.*

G Et proportio, quam habet a h ad a l minor est ea, quam dimidia g h habet ad lineam a b a puncto &c.] *Ex ijs, quæ nos proxime ostendimus; nam linea h a ad a f eandem habet proportionem, quam dimidium lineæ h g ad perpendicularem a b a puncto ad ipsam h g ductam.*

H Potest igitur ab a puncto duci linea a p ad contingentem &c.] *Ex octaua huius.*

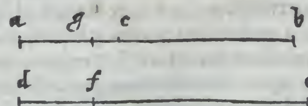
I Cum sit h p recta maior circumferentia h r.] *Fiat ad lineam a p, & ad punctum in ea datum a, angulus æqualis angulo h a p, qui sit p a m: & ducta p m, erunt duæ lineæ h p, p m maiores circumferentia h r m, ex ijs, quæ posita sunt ab Archimede*
23. primi.
15. quinti. *in principio lib. de sphæra, & cylindro. sicut autem lineæ h p, p m ad circumferentiam h r m, ita dimidium harum linearum ad dimidium circumferentiæ, hoc est linea h p ad circumferentiam h r. est enim linea h p æqualis lineæ p m; quòd triangulus p a h æqualis*
4 primi. ult. sexti. *sit triangulo p a m: & circumferentia h r æqualis est circumferentiæ r m; cum æqualibus angulis subijciantur. quare sequitur lineam h p maiorem esse circumferentia h r.*
14. quinti.




K Quare & r a ad a n maiorem habet proportionem, quam circumferentia circuli h g k ad h k r circumferentiam.] *Quam obrem illud sequatur, nos uniuerse demonstrabimus proposito eiusmodi theoremate.*

Si pars ad totum maiorem proportionem habeat, quam alterius totius pars ad suum totum: habebit & totum ad reliquum, maiorem proportionem, quàm alterum totum ad reliquum.

*Sit totius a b, pars a c; quæ ad a b maiorem habeat proportionem, quàm totius d e pars d f ad ipsam d e. Dico a b ad c b maiorem proportionem habere, quàm d e ad f e. fiat ut d f ad d e, sic alia quæpiam linea, quæ sit a g*
13. quinti. *ad a b. habebit ergo a c ad a b maiorem proportionem, quam a g ad*
10. eiusdē. *eandem. quare a c maior erit ipsa a g: & ob id g b maior ipsa c b. Et quoniam a g ad a b est, ut d f ad d e: erit è contrario a b ad*
19. quinti *a g, ut d e ad d f: & per conuersionem rationis a b ad g b, ut d e*
8. quinti. *ad f e. sed a b ab c b maiorem habet proportionem, quam ad g b; cum maior sit g b, ipsa c b, ut dictum*



*dictum est. ergo & a b ad c b maiorem habet, quam d e ad f e: quod monstrare uolebamus.*

## IN PROPOSITIONEM XIX.

A Et proportio, quam habet t a ad a l, maior est ea, quam dimidia t n habet ad lineam ab a puncto ad ipsam t n perpendiculariter ductam.] *Ducatur, ut dictum est superius, à puncto a ad lineam t n perpendicularis a i. erit eadem ratione t a ad a f, ut t i ad i a; hoc est ut dimidium lineæ t n ad perpendicularem ab a ad ipsam t n ductam. Quòd cum linea a l posita sit minor linea a f: habebit t a ad a l maiorem proportionem, quam ad a f; hoc est, quàm dimidium t n ad perpendicularem ab a ad ipsam ductam.* 8.quinti.

B Similiter autem ostendetur, neque minor esse, quàm dupla.] *Nam si fieri possit, sit linea f a minor, quàm dupla circumferentiæ circuli t m n: assumaturq; linea a l, maior quidem, quã linea a f, minor uero, quàm dupla circumferentiæ circuli t m n: & ducatur à puncto t linea t u æquidistans ipsi a f. Rursus in circulo est linea t n, minor diametro: & alia tangit circulum in puncto t. proportioq;, quam habet t a ad a l minor est ea, quam dimidium lineæ t n habet ad perpendicularem ab a puncto ad ipsam t n ductam. ducemus ergo ab a lineam a p ad contiugentem; ita ut r o, quæ media interijcitur inter lineam rectam in circulo datam, & circuli circumferentiam, ad lineam t p eam habeat pruportiouem, quàm t a ad a l: id uero fieri posse ex octaua huius mauifestum est; secet enim linea a p circulum quidem in puncto r, lineam uero spiralem in puncto q, & lineam t n in o. Quoniam igitur linea r o ad t p eam habet proportionẽ, quam t a, siue r a ei æqualis ad a l, ut posuimus; & permutando r o ad r a habet eam, quam t p ad a l. sed t p ad a l maiorem habet proportionem, quàm circumferentia t r ad circuli circumferentiam t m n bis sumptam; nam t p maior est, quàm circumferentia t r: & a l minor, quàm dupla circumferentiæ circuli t m n. quare r o ad r a habet maiorem proportionem, quàm circumferentia t r ad circuli t m n circumferentiam bis sumptam: & ex ijs, quæ nos monstrauimus in antecedente, r a ad a o maiorem habet proportionem, quàm circumferentia circuli t m n bis sumpta ad circumferentiam t m r unà cum*

*cum tota circuli circumferentia. quam uero proportionem habent dictæ circumferentiæ, eandem habet t a ad q a, ex decima quinta huius. ergo r a ad a o maiorem habet, quàm t a ad a q: quod fieri non potest; quoniam lineæ r a, t a inter se sunt æquales; & a o maior, quàm a q. non est igitur f a minor, quàm dupla circumferentiæ circuli t m n.*

C Et multiplicem esse circumferentiæ circuli, secundum numerum circulationis nominati eodemmet numero.] *Vt si linea spiralis in tertia circulatione fuerit descripta; erit ea tripla tertij circuli: & si in quarta circulatione; quadrupla quarti circuli: & ita in reliquis.*

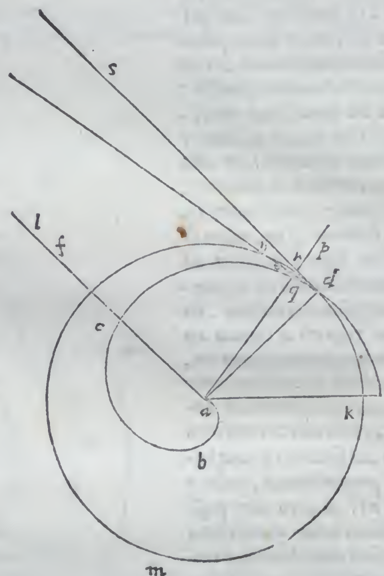
## IN PROPOSITIONEM XX.

A Similiter autem superioribus ostendetur, neque minor esse.] *Nam si fieri potest, sit a f minor circumferentia k m d: & sumatur linea a l maior quidem, quàm a f; minor uero, quàm circumferentia dicta k m d: atque à puncto d ducatur linea d s æquidistans ipsi a f. Quoniam igitur linea d n in circulo minor est, quã diameter: & alia tangit circulum in puncto d: proportioq́;, quam a d habet ad a l minor est ea, quam habet dimidium lineæ d n ad perpendicularem ab*

8. huius. *à puncto ad ipsam d n ductam: poterimus ab ipso a ad contingentem lineam ducere a p, ut portio r o, quæ est inter lineam d n, & circumferentiam circuli ad ipsam d p, eam proportionem habeat, quam d a ad a l; secet enim linea a p circulum in puncto r; & lineam d n in o; spiralem uero lineam in q. Rursus cum r o ad d p eam habeat proportionem, quam d a, siue r a ad a l: habebit permutando r o ad r a eandem, quã d p ad a l. sed d p ad a l maiorem habet proportionem, quam circumferentia d r ad circumferentiam k m d; quoniam d p maior est, quàm d r circumferentia: & a l posita est minor, quàm circumferentia k m d, ergo r o ad r a maiorem proportionem habet, quàm cirrumferentia d r ad circumferentiam k m d: & propterea r a ad a o maiorem habet, quam k m d circumferentia ad*

15. huius. *circumferentiam k m r, ut superius monstratum est. Sed quam proportionem habent dictæ circumferentiæ, eandem habet linea d a, ad q a. quare r a ad a o maiorem*

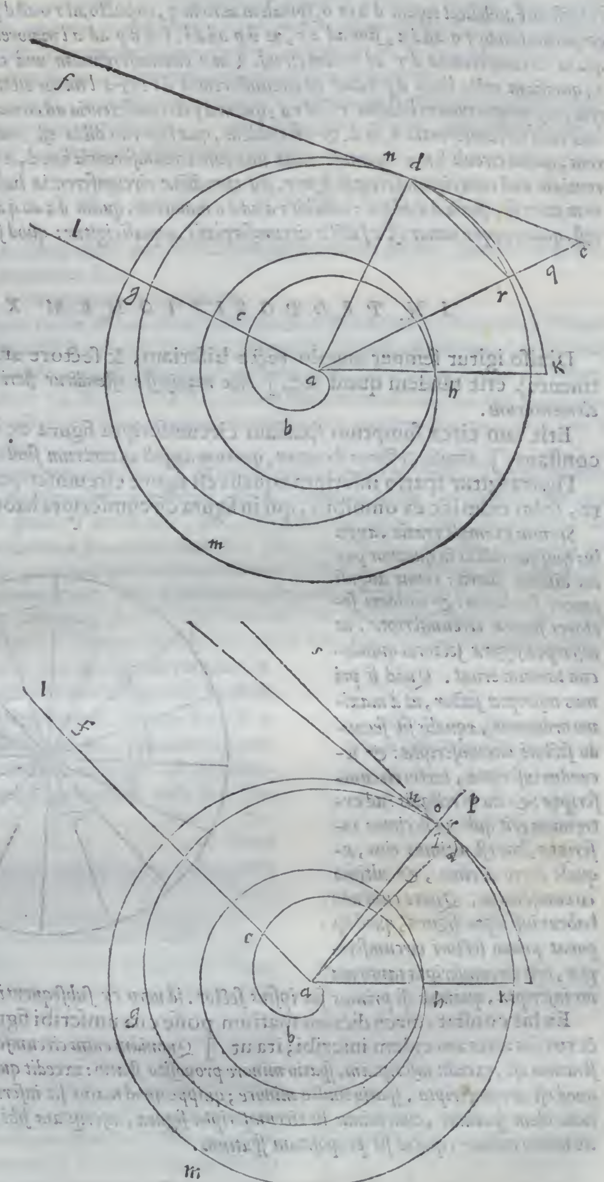
8. quinti. *habebit, quàm d a ad q a; quod fieri non potest; cum r a, d a sint æquales, & a o maior, quàm a q.*




H Eodem quoque modo ostendetur, & si lineam spiralem in secunda circulatione descriptam.] *Sit enim a b c h linea spiralis in prima circulatione descripta, & h g d in secunda: & contingat eam aliqua recta e d f in puncto d: ab ipso autem d ad principium lineæ spiralis ducatur d a: & centro quidem a, interuallo autem a d describatur circulus d m n; qui secet principium circulationis in puncto k: & ad ipsam d a erigatur perpendicularis a f. coibit ipsa cum linea e d f, ex ante dictis. coeat in f. Dico a f æqualem esse toti circumferentiæ circuli d m n, & præterea circumferentiæ k m d. Si enim non est æqualis, uel maior erit, uel minor. Sit primum, si fieri potest, maior: & sumatur aliqua recta a l minor quidem, quàm a f, maior uero, quàm tota circuli d m n circumferentia, & circumferentia k m d. Rursus circulus est k m n: atque in ipso recta linea d n, minor diametro: & proportio, quam habet d a ad a l maior est ea, quam ha-*

7. huius. *bet dimidium lineæ d n, ad perpendicularem ab a puncto ad ipsam d n ductam. Quare fieri poterit*

*terit, ut ab ipso a ad d n protractam ducatur linea a e, secans circulum quidem in r; lineam uero spiralem in q; ita ut e r ad d r eam proportionem habeat, quam d a ad a l. habebit igitur permutando e r ad d a, uel ad a r proportionem eam, quã d r ad a l. At uero d r ad a l minorem habet proportionem, quam circumferentia d r ad totam circuli k m n circumferentiam unà cũ circumferentia k m d; quòd recta linea d r minor sit circumferentia d r: & a l minor dictis circumferentijs. minorem ergo proportionẽ habebit e r ad a r, quàm circumferentia d r ad totam circuli k m n circumferẽtiam unà cum circumferentia k m d. quare & componendo a e ad a r minorem habebit, quàm tota circumferentia circuli k m n unà cum circumferentia k m d r, ad totã circumferẽtiam unà cum circumferentia k m d. Hæ autem circumferentiæ inter se se eãdem habent proportionem, quã q a ad d a. sequitur ergo minorem habere proportionem a e ad a r, quàm q a ad d a: quod esse non potest; cum q a minor sit, quàm a e; & ipsæ a r, d a sint æquales. non igitur a f maior est tota circuli k m n circumferentia, unà cum circumferentia k m d.*




15. huius.

*Similiter autem antè dictis monstrabimus, neque minorem esse; sumpta linea a l maiore ipsa a f, et minore dictis circũferentijs, atque per punctũ d ducta d s æquidistanti ipsi a f. A puncto enim a ad contingentẽ ducere licebit lineam a p, quæ secet circulum quidem in puncto r, & lineam in circu* 8. huius.

f lo

*lo existenté, uidelicet ipsam d n in o, spiralem uero in q, eo pacto, ut r o ad d p ita, sit ut d a ad a l. erit & permutando r o ad d a, siue ad a r, ut d p ad a l. sed d p ad a l maiorem proportionem habet, quàm circumferentia d r ad totam circuli k m n circumferentiam unà cum circumferentia k m d; quoniam recta linea d p maior est circumferentia d r: & a l minor dictis circumferentijs. maiorem ergo proportionem habebit r o ad r a, quàm d r circumferentia ad circumferentiam circuli k m n unà cum circumferentia k m d. & ob eandem, quæ superius dicta est, rationem, r a ad a o maiorem, quàm circuli k m n circumferentia unà cum circumferentia k m d, ad circuli k m n circumferentiam unà cum circumferentia k m r. sed cum dictæ circumferentiæ habeant eandem proportionem inter se, quam d a ad q a: habebit r a ad a o maiorem, quàm d a ad q a: quod item esse non potest. quare neque minor est a f dictis circumferentijs. æqualis igitur: quod fuerat demonstrandum.*

## IN PROPOSITIONEM XXI.

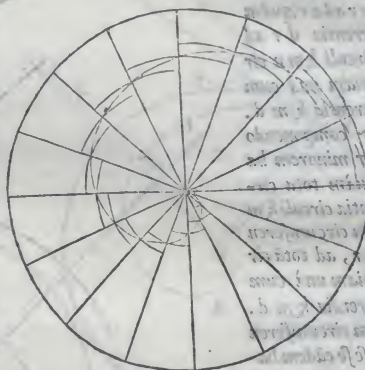
A Diuiso igitur semper angulo recto bifariam, & sectore angulum rectum continente]. erit tandem quod &c.] *Hoc manifeste ostenditur fieri posse ex prima decimi elementorum.*

B Erit iam circa sumptum spatium circumscripta figura ex similibus sectoribus constans.] *Similes sectores dicuntur, quorum anguli ad centrum sunt æquales.*

Sectores similes.

C Figura igitur spatio inscripta æqualis est figuræ circumscriptæ dempto h a k secto re, solus enim hic ex omnibus, qui in figura circumscripta habentur, relictus est.]

*Si enim exempli gratia, angulus quisque rectus in quatuor partes diuisus fuerit: erunt anguli omnes sexdecim: & totidem sectores figuræ circumscriptæ. at inscriptæ figuræ sectores quindecim tantum erunt. Quòd si primus inscriptæ sector, ut à maximo ordiamur, æqualis sit secundo sectori circumscriptæ: & secundus inscriptæ, tertio circumscriptæ: & ita in reliquis: ad extremum erit quintus decimus inscriptæ, hoc est ultimus eius, æquale sexto decimo, & ultimo circumscriptæ. Quare cum non habeat inscripta figura, quod opponat primo sectori circumscriptæ, erit circumscripta tanto maior inscripta, quantus est primus sui ipsius sector. id uero ex subsequenti figura fiet manifestum.*



D Ex his constat, circa dictum spatium posse circumscribi figuram, qualis dicta est, & rursus alteram eidem inscribi; ita ut.] *Quoniam enim circumscripta figura, ut demonstratum est, excedit inscriptam, spatio minore proposito spatio: excedit quoque spatium illud, circa quod est circumscripta, spatio multo minore; quippe quod maius sit inscripta figura. Et simili ratione idem spatium, cum minus sit circumscripta figura, inscriptam sibi ipsi figuram excedit, spatio multo minore, quàm sit propositum spatium.*

## IN PROPOSITIONEM XXII.

A Itaque diuisis semper angulis rectis in angulos æquales ei, qui continetur k h a: & aliis dispositis ut supra.] *In secunda lineæ spiralis circulatione aliter contingit, quàm in prima: ná tot sectores sunt in utraque figura, quot anguli: & propterea circumscripta inscriptam non excedit*

*dit toto illo ſectore h k a. par enim eſt ex eo demi ſectorem æqualem ultimo ſectori inſcriptæ figuræ, ſcilicet h e r; qui ſit h e s. unde relinquitur harum figurarum exceſſum eſſe ſpatium e s k a; hoc eſt id, quo ſector h k a excedit ſectorem h e r: quod quidem, cum minus ſit ſectore h k a, ut pote eius pars, multo minus erit dato ſpatio, & propoſitum multo magis concludetur.*

Conſtat igitur fieri poſſe, ut circumſcripta figura excedat ſumptum ſpatium ſpatio minori, quocunque propoſito &c.] *Corollarium hoc, & quæ ſequuntur, perſpicua ſunt ex iis, quæ proxime ſcripſimus in uigeſimam primam.* B

## IN PROPOSITIONEM XXIIII.

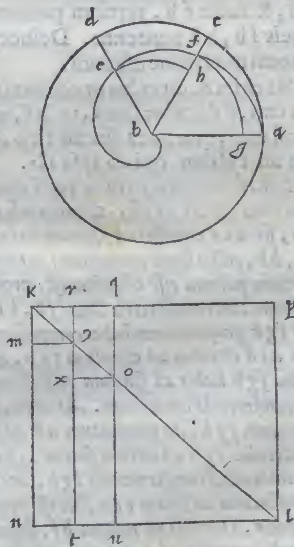
Sunt igitur quædam lineæ ab h puncto ad lineam ſpiralem ductæ, quæ ſeſe æqualiter excedunt.] *Ex duodecima huius.* A

Vt oſtenſum eſt.] *In corollario decimæ huius.* B

Rurſus ſunt quædam rectæ lineæ ſeſe æqualiter excedentes ab h ad lineam ſpiralem ductæ, quarum maxima eſt h a. &c.] *In codice græco impreſſo multa deſiderantur, ut ita ſcribi oporteat.* πάλιν οὖν ἐντὶ τινὲς γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ὧν ἐστὶ μεγίστα μὲν ἁ θα, ἐλαχίστα δὲ ἁ θε, καὶ ἐστὶν ἁ ἐλαχίστα ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν τοῦ αζηι κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ. C

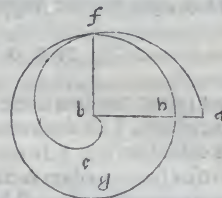
Hoc enim demonſtratum iam fuit.] *In eodem corollario decimæ huius. Pappus in collectionibus mathematicis hoc idem aliter demonſtrat, paucis admodum poſitis: & quoniam non nulla etiam addidit ad lineam ſpiralem pertinentia, quæ animaduerſione digna ſunt; eius uerba hoc loco ſubſcribenda cenſui in latinum ſermonem conuerſa. Theorema, inquit, de helica, ſeu linea ſpirali in plano deſcribenda, propoſuit quidem Conon Samius geometra, Archimedes uero admirabili quadam aggreſſione demonſtrauit. Itaque dicta linea eiuſmodi generationem habet.* D

Sit circulus, cuius centrum b, & ſemidiameter b a: moueaturque b a ita, ut b punctum maneat, & ipſum a æqueuelociter feratur in circuli circumferentia: ſimul uero aliquod punctum à b incipiens feratur in recta linea b a æqueuelociter uſque ad a: & in æquali tempore b pertranſeat lineam b a: & a ipſam circuli circumferentiam. punctum igitur hoc in linea b a motum ſecundum circulationem deſcribet lineam: qualis, eſt ipſa b e f a: et eius quidem principium erit punctum b: principium circulationis recta b a: ipſa uero linea helix, ſeu linea ſpiralis appellatur. Cuius principale accidens eiuſmodi eſt. Ducta qualibet linea ad ipſam, ut f b, & producta, erit ut tota circuli circumferentia ad circumferentiam a d c, ita recta a b ad rectam b f. Hoc autem intelligere facile eſt ex generatione ipſa. In quo enim tempore a punctum totam circuli circumferentiam pertranſit, in hoc & b pertranſit rectam b a: in quo autem a pertranſit circumferentiam a d c, in hoc & b ipſam b f rectam: & ſunt motus ipſi ſibi ipſis æquales. quare & inter ſe proportionales erunt. Manifeſtum autem & illud, rectas lineas omnes, quæcunque à puncto b ad ipſam ſpiralem ductæ angulos æquales continent, æqualiter ſeſe inuicem excedere. Quibus poſitis oſtenditur, figuram contentam linea ſpirali, & recta, quæ eſt in principio circulationis, tertiam partem eſſe comprehendentis ipſam circuli.




*SIT enim, & circulus, & prædicta linea; & exponatur parallelogrammum rectangulum k n*

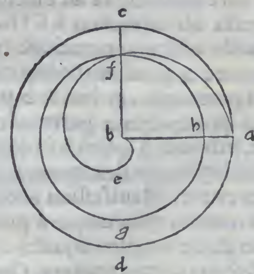
*l p: sumaturq; a c circumferentia pars quædam circumferentiæ circuli. & sumatur h r recta, ipsius k p eadem pars. Iungantur præterea c b, b a: & lineæ quidem k n æquidistans ducatur r t, lineæ uero k r, ipsa m 9: & circa b centrum describatur circumferentia f g. Quoniam igitur est ut a b recta linea ad a g, hoc est, ut b c ad c f, sic tota circuli circũferentia ad circumferentiam c a: hoc enim est lineæ spiralis principale accidens. Vt autem circuli circumferentia ad ipsam c a, sic p k ad k r: & ut p k ad k r, sic l k ad k 9, hoc est r t ad r 9. & ut igitur b c ad c f, ita t r ad r 9: & per conuersionem rationis. Quare ut quadratum b c ad quadratum b f, ita quadratum r t ad quadratum t 9. Vt autem quadratum b c ad quadratum b f, ita a b c sector ad sectorem f b g: & ut quadratum r t ad quadratum t 9, ita cylindrus factus à parallelogrammo k t circa axẽ n t ad cylindrum à parallelogrãmo m t circa eundem axem. Vt ergo sector a b c ad f b g sectorem, ita cylindrus à parallelogrammo k t circa axem n t ad cylindrum a b ipso m t circa eundem axem: similiter quoque si a c circumferentiæ ponamus æqualem c d: ipsi autem k r rectæ lineæ æqualem ponamus r q: & cadem construamus: erit ut d b c sector ad sectorem e b h, sic cylindrus à parallelogrammo r u circa axem t u ad cylindrum à parallelogrammo u x circa eundem axem. Eadem ratione procedentes demonstrabimus, ut totus circulus ad omnes figuras ex sectoribus inscriptas lineæ spirali, sic esse cylindrum à parallelogrammo n p, circa axem n l ad omnes figuras ex cylindris ipsi cono, qui fit à triangulo k n l circa axem l n, inscriptas: et rursus, ut circulus ad omnes figuras ex sectoribus circumscriptas lineæ spirali, sic cylindrum ad omnes figuras ex cylindris eidem cono circumscriptas. ex quo manifestum est, circulum ad eam figuram, quæ inter lineam spiralem, & rectam a b interijcitur, ita esse, ut cylindrus ad conum. triplus est igitur circulus prædictæ figuræ; quod fuerat demonstrandum.*

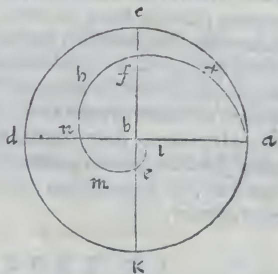



Eodem modo demonstrabimus, si ducatur quæpiam linea ad spiralem, ut b f: & per f circa centrum b describatur circulus: figuram contentam linea spirali f e b, & recta f b, tertiam partem esse figuræ circumferentia circuli f g h, & rectis lineis f b, b h contentæ. Deinceps autem conscribemus theorema circa eandem lineam notatione dignum.

Sit enim & circulus prædictus in generatione, & linea spiralis eadem a f e b. Dico iam, si ducatur linea, ut b f, esse figuram contentam tota linea spirali, & recta a b ad eam, quæ linea spirali f e b, & b f recta continetur, ut cubus, qui fit à linea a b ad cubum, qui ab ipsa f b.

*Describatur enim circulus per f circa centrum b, qui sit f g h. Itaque quoniam est, ut figura, quæ linea spirali a f e b, & recta a b continetur, ad figuram contentam spirali f e b, & f b recta, sic a c d circulus ad figuram circumferentia f g h, & f b, b h, rectis lineis contentam: utrunque enim utriusque tertiam partem esse ostensum est: circulus autem a c d ad spatium contentum rectis lineis f b, b h, & circumferentia f g h proportionem habet compositam ex ea, quam habet a c d circulus ad circulum f g h, & ex ea, quam circulus f g h habet ad spatium rectis lineis f b, b h, & f g h circumferentia contentum. At uero, ut a c d circulus ad circulum f g h, ita quadratum a b ad quadratum b f: & ut circulus f g h ad dictum spatium, sic tota ipsius circumferentia ad circumferentiam f g h, hoc est a c d circuli circumferentia ad ipsam c d a, hoc est propter accidens spiralis lineæ, a b recta ad rectam b f. figura igitur, quæ linea spirali, & recta a b continetur ad contentam spirali, & b f proportionem habet compositam ex ea, quam ab quadratum habet ad quadratum f b, & ex ea, quam habet linea recta a b ad ipsam b f. hæc autem proportio eadem est ei, quam habet cubus a b ad cubum b f.*






Ex hoc conſtat, ſi poſita eadem linea ſpirali, & circulo circa ipſam, producatur a b ad d: & ad rectos angulos ipſi ducatur linea c f b e k, qualium partium una eſt, ſpacium contentum linea ſpirali b l e, & recta b e, talium illud quidem, quod continetur ſpirali n m e, & rectis n b, b e eſſe ſeptem: & quod continetur f h n, & rectis f b, b n undeuiginti: quod uero a x f, & a b, b f continetur, triginta ſeptem perſpicua enim hæc ſunt ex præoſtenſo theoremate. Et qualium a b recta eſt quatuor, talium ipſam quidem f b eſſe trium; n b, duarum; & b e unius: quod etiam perſpicuum eſt, ex accidenti lineæ ſpiralis, & ex eo, quod circumferentiæ a c, c d, d k, k a inter ſe ſunt æquales.

## IN PROPOSITIONEM XXV.

Quæ eadem eſt ei, quam habent hæc utraque; rectangulum contentum ſemidiametro circuli ſecundi, & ſemidiametro primi; & tertia pars quadrati eius lineæ, qua ſemidiameter ſecundi circuli excedit ſemidiametrum primi ad quadratum ſemidiametri ſecundi circuli.] *Quoniam ſemidiameter primi circuli ad ſemidiametrum ſecundi ſubduplam habet proportionem: nam ex decima quinta huius h e, ad h a eam habere proportionem compertum eſt, quam habet circumferentia circuli a f g i ad eandem circumferentiam bis aſſumptam: ſi poſuerimus ſemidiametrum primi circuli, uidelicet h e eſſe trium partium; erit h a ſemidiameter ſecundi earundem partium ſex: & rectangulum his ſemidiametris contentum 18: quadratum autem exceſſus earum 9. quare compoſitum ex illo rectangulo, & tertia parte huius quadrati erit 21. ſed quam proportionem habet 21 ad 36, hoc eſt ad quadratum lineæ h a, eam habet 7 ad 12. compoſitum igitur iam dictum ad quadratum ſemidiametri ſecundi circuli habet eandem proportionem, quàm 7 ad 12.* A 15.quinti

Sit linea ſpiralis a b c d e.] *Addenda ſunt hæc in græco codice.* ἔςω ἕλιξ, ἐφ᾽ ᾇς ἁ α β γ δ ε ἐν τᾶ δευτέρα περιφορᾶ γεγραμμένη. B

Habebit igitur circulus y ad circulum a f g i eam proportionem, quam ſeptem ad duodecim; propterea quòd ipſius ſemidiameter ad ſemidiametrũ circuli a f g i eandem habet poteſtate proportionem.] *Circuli enim ad inuicem ſunt, ſicuti diametrorum quadrata. ſed ſemidiametrorum quadrata non aliam habent proportionem, quàm diametrorum. circuli ergo ad inuicem erunt, ſicuti ſemidiametrorum quadrata. Quòd cum poſitum ſit dictarum ſemidiametrorum quadrata eam habere proportionem, quam ſeptem ad duodecim: et ipſi circuli neceſſario eandem habebunt.* C 2. duode. 15.quinti.

Sectores igitur à lineis æqualibus maximæ deſcripti &c.] *Poſt ea uerba.* χωρὶς τῶ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίςας. *& hæc addenda ſunt.* οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίςα ποτὶ τὼς τομέας τὼς ἀπὸ τᾶν τῶ ἴσω ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τῶ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίςας. D

Hoc enim oſtenſum eſt.] *In undecima huius.* E

Sectores igitur ab æqualibus maximæ deſcripti ad ſectores à lineis ſe ſe æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à maxima, maiorem proportionem habent, quàm quadratum h a &c.] *Ex undecima huius.* F

Et tertia pars quadrati eius lineæ, qua ſemidiameter circuli maioris excedit ſemidiametrum minoris.] *Græcus codex ita reſtituendus.* καὶ τὸ τρίτον μέρος τῶ τετραγώνου τῶ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τῶ κέντρου τῶ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων, τᾶς ἐκ τῶ κέντρου τῶ ἐλάττονος ποτὶ τὸ τετράγονον. G

## IN PROPOSITIONEM XXVI.

Sector igitur y q ad h a f ſectorem eandem proportionem habet, quam rectangulum a h e, & tertia pars quadrati e f habeat ad quadratum h a. horum enim ſemidiametri A

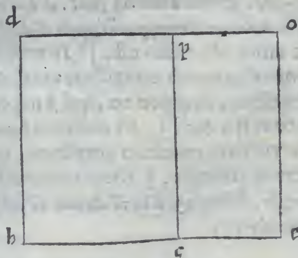
ult. sexti. diametri inter se se eandem habent potestate proportionem:] *Erit enim sector y q ad reliquum sectorem totius sui circuli, sicut eius sectoris angulus ad reliquum ex quatuor rectis; & conuertendo, componendoq́; totus circulus ad sectorem y q erit, sicut quatuor recti ad angulum sectoris y q. & eadem ratione accidet in circulo maiore, ut totus circulus sit ad sectorem h a f, sicut item quatuor recti ad angulum sectoris h a f. sed cum anguli sectorum y q, & h a f sumpti sint* 11.quinti. *æquales: erit minor circulus ad sectorem y q, sicut maior ad sectorem h a f: & permutando, circulus ad circulum, sicut sector ad sectorem. sed quam proportionem habent circuli inter se se, hanc habent semidiametrorum quadrata, ut superius est monstratum. sector igitur y q ad sectorem h a f eandem habet proportionem, quam quadratum semidiametri unius, ad quadratum semidiametri alterius.*

## IN PROPOSITIONEM XXVII.

A Secundus autem circulus ad primum est, sicut duodecim ad tria: quod manifeste patet.] *Constat nanque ex decima quinta huius semidiametrum secundi circuli duplum esse semi* 20.sexti. *diametri primi. quare erit circulus secundus ad circulum primum, sicut quatuor ad unum (hanc* 15.quinti. *enim habent proportionem semidiametrorum quadrata). sicut autem quatuor ad unum, sic duodecim ad tria. circulus igitur secundus ad primum est sicut duodecim ad tria. ratio autem, qua hoc* 25. huius. *loco utitur Archimedes, & inferius sæpissime ex uigesima secunda quinti necessaria est. nam si spatium k l ad secundum circulum est, sicut septem ad duodecim: secundus autem circulus ad pri-* 24. huius. *mum, sicut duodecim ad tria: & primus circulus ad spatium k, sicut tria ad unum: erit ex æquali spatium k l ad k, sicut septem ad unum: & diuidendo l spatium ad k, sicut sex ad unum. quare k spatium sexta pars est eius spatij, in quo l.*

B Hæc autem eam habent inter se proportionem, quam decem & nouem ad septē.] *Videntur ante hæc uerba non nulla desiderari in græco codice, ut ita legendum sit.* καὶ τὸ κλμ ἄρα ποτὶ τὸ κλ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν γθ, θβ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γβ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν βθ, θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αβ. ταῦτα δὲ ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ. *Vt autem hoc ita esse facile intelligatur. ponamus semidiametrum primi circuli h a esse trium partium: erit h b semidiameter secundi circuli earundem partium sex, ex decima quinta huius: & h c tertij circuli semidiameter nouem. quare rectangulum c h b, & tertia pars quadrati c b erunt 57: & re-* 15.quinti. *ctangulum b h a, & tertia pars quadrati b a 21. Hæc autem inter se sunt sicut 19 ad 7. spatium ergo k l m ad spatium k l est, ut 19 ad 7: & diuidendo spatium m ad k l, ut 12 ad 7. at ipsum k l ad l est, ut 7 ad 6: quod superius est demonstratum. est igitur m ad l, ut 12 ad 6. quare spatium m duplum est ipsius l spatij.*

C Sed utraque illa excedunt hæc utraque eo, quo & rectangulum e h d excedit rectangulum d h c; hoc est eo, quod d h, c e continetur.] *Nam cum lineæ c d, d e sint æquales; erunt earum quadrata æqualia; & item tertia ipsorum pars æqualis. Quare ea utrinque æquali existente, excessus tantum erit id, quo rectangulum e h d excedit rectangulum d h c; hoc est rectangulum contentum lineis d h, c e; quod sic monstratur. Sit linea h e æqualis ipsi h e in spirali linea descriptæ: & ad punctum h erigatur perpendicularis h d, quæ sit etiam ipsi h d æqualis: & compleatur rectangulum d h e o: ab ipsa uero h e abscindatur æqualis ipsi h c: & per c ducatur æquidistans ipsis h d, e o, quæ sit c p. manifestum est his ita constitutis, rectangulum d e æquale esse rectangulo contento e h, h d; & rectangulum d c æquale ei, quod continetur d h, h c. relinquitur ergo eorum excessum esse rectangulum c o; quod quidem est id, quod continetur linea p c, hoc est d h, & ipsa c e, ut monstrare uolebamus.*




D Quare spatium n ad k l m n eandem habet &c.] *Codex græcus ita restituendus est.* τὸ

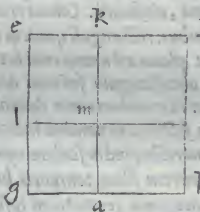
τὸ γ ἄρα ποτὶ κλμν χωρίον τȣ̃τον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ θγ βδ ποτὶ τὸ ὑπὸ θγ θβ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τȣ̃ ἀπὸ τᾶς γβ, καὶ τὸ ὑπὸ θγ, βδ.

Hæc autem æqualia ſunt rectangulo d h c, & tertiæ parti quadrati c d.] *Eſt enim linea d h æqualis duabus lineis h b, b d. quare rectangulum baſim habens d h, altitudinem uero h c, æquale eſt duobus rectangulis baſes habentibus h b, b d, & altitudinem eandem h c. tertia uero pars quadrati c d æqualis eſt tertiæ parti quadrati c b; quòd quadrata ſint æqualia, ex æqualibus lineis orta.* E 1. ſexti.

Rectangulum uero h d, c e ad rectangulum h c, d b eam habet, quam h d ad h c; quoniam lineæ c e, b d ſunt æquales.] *Ex prima ſexti.* F

## IN PROPOSITIONEM XXVIII.

Quare x ſpatium ad n p, eam habet, quam rectangulum h a g cum duabus tertiis quadrati g a ad utraque hæc; & ad rectangulum a h g, & ad tertiam partem quadrati g a.] *Quoniam enim ut ex uigeſima ſexta huius apparet; ſpatium n p ad ſectorem c h g, eam habet proportionem, quam rectangulum g h a, & tertia pars quadrati a g ad quadratum g h; & conuertendo ſector c h g ad ſpatium n p habet eam, quam quadratum g h ad rectangulum g h a, & tertiam partem quadrati a g. quare diuidendo ſpatium x ad ipſum n p habet eam, quam exceſſus, quo quadratum g h excedit hæc utraque; rectangulum g h a, & tertiam partem quadrati a g, hoc eſt (ut mox oſtendemus) rectangulum h a g, & duæ tertiæ quadrati g a ad rectangulum g h a, & tertiam partem quadrati a g. rectangulum autem h a g, & duas tertias quadrati g a eſſe id, quo quadratum g h excedit rectangulum g h a, & tertiam partem quadrati a g, hoc pacto oſtendetur. fiat ex linea g a h quadratum e g h f: & per a ducatur a k æquidiſtans ipſi g e, h f: fiat quoque ex ipſa g a quadratum l g a m. manifeſtum iam eſt, rectangulum k h æquale eſſe ei, quod continetur g h, h a; & rectangulum k l æquale contento h a, a g; quòd linea e l æqualis ſit ipſi h a. quare ſi à quadrato lineæ g h, auferemus rectangulum k h, quod continetur g h, h a; & tertiam partem quadrati a g: relinquentur utraque hæc; rectangulum k l, hoc eſt contentum h a, a g; & duæ tertiæ quadrati a g.* A




Spacium igitur n p ad ipſum p eam proportionem habet, quam utraque; rectangulum g h a, & tertia quadrati g a ad utraque; ad rectangulum g a h, & tertiam quadrati g a &c.] *Quoniam n p ſpatium ad ſectorem n eandem habet proportionem, quam rectangulum g h a, & tertia pars quadrati g a, ad quadratum h a. per conuerſionem rationis ſpatium n p ad p ſpatium habet eandem, quam rectangulum g h a, & tertia quadrati g a ad exceſſum, quo rectangulum g h a unà cum tertia quadrati g n excedit quadratum h a. exceſſus autem is eſt rectangulum g a h, & tertia quadrati g a, ut poſtea monſtrabitur. ſpatium igitur n p ad p habet eam proportionem, quam rectangulum g h a, & tertia quadrati g a ad rectangulum g a h, & tertiam quadrati g a. Rurſus enim eadem diſpoſitione manente, quæ prius, producatur linea l m uſque ad ipſam h f. Iam conſtat præter ea, quæ ſuperius dicta ſunt, m f, quadratum eſſe, & æquale quadrato lineæ h a. quare exceſſus, quo utraque hæc, rectangulum a f, hoc eſt contentum g h, h a, & tertia pars quadrati g a, excedunt quadratum h a, erit rectangulum m h, quod quidem æquale eſt contento h a, a g, & tertia pars quadrati ipſius a g: quod monſtrare uolebamus. Reliqua quæ ſequuntur ex uigeſima ſecunda quinti, & prima ſexti, tum manifeſtam, tum firmam habent demonſtrationem, ut uerbum amplius addere ſuperuacaneum uideatur.* B

# EIVSDEM COMMENTARIVS

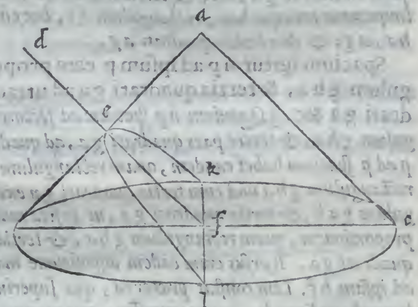
## IN QVADRATVRAM PARABOLES.

### IN PROPOSITIONEM I.

A 

SI SIT rectanguli coni ſectio a b c.] *Quam rectanguli coni ſectionem appellat Archimedes, poſteriores ut Apollonius Pergæus, & alij parabolen dixerunt. quamobrem autem id factum ſit, tradit Eutocius Aſcalonita in commentarijs in primum conicorum Apollonij his uerbis, quæ à nobis latine reddita ſunt. Priſci inquit, conum definientes; rectanguli trianguli circumuolutionem, manente uno eorum, quæ circa rectum angulum unt, latere: & conos omnes rectos, & unam in ſingulis ſectionem fieri arbitrati ſunt: in rectangulo quidem cono uocatam parabolen; in obtuſiangulo hyperbolen; in acutiangulo autem ellipſim: atque ita nominatas apud ipſos ſectiones paſſim inuenias. Quemadmodum igitur priſcis illis in unaquaque triangulorum ſpecie ſpeculantibus duos rectos: primum in æquilatero; deinde in æquicruri; poſt in ſcaleno: ætate poſteriores uniuerſale theorema demonſtrarunt, eiuſmodi. Omnis trianguli interiores tres anguli duobus rectis ſunt æqules: ita & in coni ſectionibus: rectanguli quidem coni ſectionem dictam, in rectangulo tantum cono ſpeculati ſunt; ſecto ſcilicet plano ad unum coni latus perpendiculariter erecto: obtuſianguli autem coni ſectionem, in cono obtuſiangulo factam demonſtrarunt, & acutiangli coni ſectionem in cono acutiangulo; ſimiliter in omnibus conis ducentes plana ad unum eorum latus perpendiculariter erecta; quod & priſca ſectionum nomina indicant. Verum poſtea Apollonius Pergæus uniuerſe inſpexit in omni cono, tam recto, quàm ſcaleno omnes ſectiones ineſſe, iuxta plani ad conum differentem inclinationem. quamobrem illius temporis homines admirati mirificam conicorum theorematum demonſtrationem, magnum geometram ipſum appellarunt. Hæc quidem Geminus ſcripta reliquit in ſexto mathematicarum præceptionum libro. Quod autem dicit, manifeſtum faciemus in ſubiectis figuris. ſit per axem coni triangulum a b c: & à quo uis puncto e ducatur ipſi a b ad angulos*

B *rectos linea d e f: & per d e f immiſſum planum perpendiculariter erectum ad ipſam a b ſecet conum. rectus eſt igitur uterque angulus a e d, a e f: rectanguloq; exiſtente cono, & angulo b a c recto, ut in prima figura apparet, duobus rectis æquales erunt anguli b a c, a e f. quare æquidiſtans erit linea d e f ipſi a c: & fiet in ſuperfiicie coni ſectio parabole; ſic dicta ἀπὸ τῦ παράλληλον εἶναι; hoc eſt ab eo, quòd parallela ſit linea d e f, quæ communis ſectio eſt plani ſecantis, & trianguli per axem, ipſi a c lateri trianguli.*




Parabole unde dicatur.

*Sed ſi obtuſiangulus ſit conus, ut in ſecunda figura, obtuſo uidelicet exiſtente angulo b a c, & angulo a e f recto: duobus rectis maiores erunt anguli b a c, a e f: & non coibit d e f cum ipſo a c latere ad partes, in quibus f, ſed ad eas, in quibus ſunt a, & e; producta nimirum c a in d. faciet igitur ſecans planum in ſuperficie coni ſectionem hyperbolen; dictam ἀπὸ τῦ ὑπερβάλλειν: hoc eſt ab eo, quòd anguli b a c, a e f excedant duos ractos: uel quòd d e f excedat uerticem coni, & coeat cum ipſo c a extra. Quòd ſi acutiangulus ſit conus; hoc eſt acuto exiſtente angulo b a c: erunt anguli b a c, a e f minores duobus rectis: & lineæ e f, a c productæ coibunt tandem in aliqua parte; augere nanque, & in longius ducere conum poſſumus. Erit igitur in ſuperficie ſectio, quæ appellatur ellipſis διὰ τὸ ἐλλείπειν; hoc eſt ob id, quòd dicti anguli à duobus rectis deficiant; uel quòd ellipſis diminutus quidam circulus ſit. Ad hunc quidem modum antiqui*

Hyperbole unde.

Ellipſis unde.

ponentes

*ponentes secans planum per d e f ad rectos angulos ipsi a b lateri trianguli per axem coni; & insuper differentes conos; & propriam in unoquoque sectionem. At Apollonius ponens conum, & rectum, & scalenum; differenti ipsius plani occursu, differentes efficit sectiones. Sit enim, ut in iisdem figuris, secans planum k e l: communis autem sectio ipsius plani, & coni basis, linea k l: communis rursus sectio eiusdem, & trianguli a b c sit ipsa e f; quæ & diameter uocatur sectionis. Itaque in omnibus sectionibus ponit lineam k l ad rectos angulos esse basi trianguli a b c. Verum siquidem e f æquidistans sit ipsi a c; parabolen fieri k e l sectionem in coni superficie. Si uero coeat cum latere a c extra uerticem coni, ut in d; fieri ipsam k e l sectionem, hyperbolen: Quòd si coeat intra; fieri sectionem ellipsim; quam & θυρεὸν uocant. Generaliter igitur paraboles diameter æquidistans est uni lateri trianguli: hyperboles autem, & ellipsis diameter cum eo coit; hyperboles quidem ad partes uerticis coni; ellipsis uero ad partes basis. Scire præterea illud oportet, parabolen, & hyperbolen ex eorum numero esse, quæ in infinitum augentur: at ellipsim non item; tota enim in seipsam uergit, uelu ti circulus. Hæc Eutocius, quæ Archimedis uerbis magnam lucem afferre possunt: cum antiquarum appellationum cuiusque coni sectionis rationem exquisitissime tradant. Nos deinceps non antiqua, sed quibus Apollonius usus est, sectionum nomina crebro usurpabimus: quippe quæ latius pateant; & in omni cono reperiantur.*

Parabole quo fiat.

Hyperbole.
Ellipsis.

Parabole, & Hyperbole in infinitu augentur.

Erunt ipsæ a d, d c inter se æquales.] *Demonstratum est id ab Apollonio Pergæo libro primo conicorum, propositione quadragesima sexta.*

Quod si a d, d c sint æquales.] *Addenda sunt hæc in græco codice, ut opinor, quibus tanquam demonstratis utitur Archimedes: demonstrat autem Apollonius libro secundo, propositione quinta.*

## IN PROPOSITIONEM II.

Erunt lineæ d b, b e inter se æquales.] *Demonstrauit Apollonius libro primo, propositione trigesima quinta.*

## IN PROPOSITIONEM III.

Erit ut b d ad b f longitudine, ita a d ad a f poteſtate.] *Apollonius eodem libro propoſitione uigeſima.*

## IN PROPOSITIONEM IIII.

A Itaque ſi alia quæpiam linea f h ducatur æquidiſtans ipſi b d, & ſecans utraſque a c, c b.] *Hoc eſt lineam a c ſecet in f; & c b in h: ipſam autem ſectionem coni rectanguli in g.*

B Ducatur enim per g linea æquidiſtans ipſi a c, quæ ſit k g.] *Secet autem ipſa k g lineam b d in k; & c b in i.*

C Ergo ut b c ad b i, longitudine, ita d c ad d f poteſtate.] *Ita reſtituendus eſt codex; nam multa deſunt, quod tum ex ipſa demonſtratione: tum ex ueteri translatione apparet. Totius autem demonſtrationis ſeries manifeſtior fiet ad hunc modum. Quoniam enim ſicut b d ad b*
33. primi element. *k longitudine, ita d c ad k g poteſtate; hoc eſt ad d f, quæ eſt æqualis ipſi k g: ut autem b d ad b*
*k, ita b c ad b i: & ut d c ad f d, ita c b ad b h. quare ſicut b c ad b i longitudine, ita d c ad d*
2. ſexti. *f; hoc eſt b c ad b h poteſtate. lineæ igitur b c, b h, b i proportionales ſunt. & ſi quidē linea f h ſecet*
11. quinti. *c b intra ſectionem: erit ſicut b c ad b h, ita b h ad b i; hoc eſt ſicut totum ad totum, ita pars ad*
20. ſexti. 19. quinti. *partem. ergo c h ad h i, ut b c ad b h: hoc eſt reliquum ad reliquum, ut totum ad totum. ſi uero ſecet extra, quoniam b h ad b c eſt, ſicut b i ad b h: erit componendo b h & b c; hoc eſt c h ad b c, ſicut b i, & b h, hoc eſt ſicut h i ad b h: & permutando c h ad h i, ſicut b c ad b h. Itaque*
11. quinti. *cum ſit ſicut d c ad d f, ita b c ad b h, ut dictum eſt: & ſicut b c ad b h, ita c h ad h i: erit ſicut d c ad d f, ita c h ad h i. ſed h f ad h g eſt, ſicut c h ad h i: quoniam duo triangula c h f, i h g. cū*
4. ſexti. *æquiangula ſint, latera habent proportionalia. Eandem igitur proportionem habet d c ad d f; hoc eſt d a ad d f, quam f h ad h g: quod demonſtrare oportebat.*

## IN PROPOSITIONEM V.

A Quoniam igitur eſt rectanguli coni ſectio a b c: & ducta eſt b d æquidiſtans diametro: lineæ autem a d, d c ſunt æquales inter ſe ſe: erit linea, quæ in b puncto tangit rectanguli coni ſectionem, ipſi a c æquidiſtans.] *Linea b d, uel æquidiſtans eſt diametro, uel ipſa diameter. ſequitur autem id ex ſecunda parte primæ huius.*

B Rurſus quoniam d e æquidiſtans eſt diametro: & à puncto c ducta eſt c e tangens ſectionem coni in c, &c.] *ex ſecunda huius.*

C Quoniam enim æqualis eſt b e ipſi b d: æqualis eſt & i l ipſi k i.] *Ducta enim b c linea, & producta, fient triangula c b e, c i l æquiangula: & item æquiangula c d b, c k i: & ipſa*
4. ſexti. *c d e, c k l. quare ſicut b e ad i l, ita c e ad c l: & ſicut c e ad c l, ita c d ad c k. ſicut autem c*
11. quinti. *d ad c k, ita d b ad k i. ergo ſicut b e ad i l, ita d b ad k i: & permutando, ſicut b e ad d b, ita*
14. quinti. *i l ad k i. ſed b e æqualis eſt ipſi d b: & i l igitur ipſi k i eſt æqualis.*

D Habet autem & k i ad h k eandem, quam d a ad a k.] *Eſt enim ex antecedente k i*
19. quinti. *ad h i, ut d a ad d k: & permutando k i ad d a, ut h i ad d k. quare h k ad a k, ut k i ad d a: & rurſus permutando, conuertendoq; k i ad h k, ut d a ad a k.*

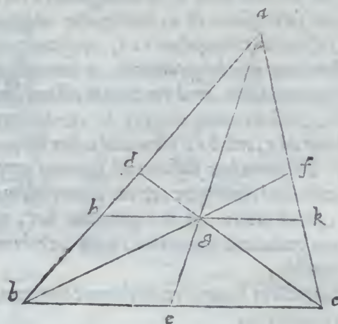
E Quare eandem habet proportionem k h ad h l, quam a k ad k c.] *Hoc loco, ut opinor, multa deſunt, ad demonſtrationem neceſſaria, ſeu uitio temporis intercepta, ſeu ab ipſomet auctorē omiſſa, quæ nos ita ſupplebimus. Quoniam enim l i ad i k eſt, ut c d ad d a: erit componendo k l ad k i, ut a c ad d a: & permutando k l ad a c, ut k i, ad d a. & rurſus quoniam k i ad h k eſt,*
11. quinti. *ut d a ad a k. permutando erit k i ad d a, ut h k ad a k. quare ſicut k l ad a c, ſic erit h k ad a*
19. quinti. *k & ſic h l ad k c. & rurſus permutando k h ad h l, ut a k ad k c: quod fuerat oſtendendum.*

## IN PROPOSITIONEM VI.

A Et ſit conſpectum in plano ſuper horizontem erecto.] *Quòd græci, ὀρθὸν latine, ut*
ὀρθὸν *opinor, dicemus directum, uel erectum ad perpendiculum, nos tamen breuitatis cauſſa, quoniam illud*

*illud sæpissime occurrit, præsertim in libro de conoidibus, & sphæroidibus: uno duntaxat uerbo expressimus, erectum ubique uertentes.*

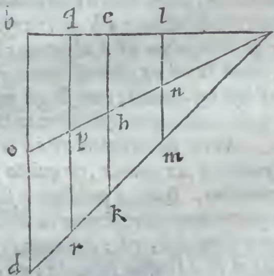
Erit trianguli b c d centrum grauitatis ipsum h punctum; nam monstratum est hoc in mechanicis.] *Sit triangulum a b c, & ducatur ab angulis ad bipartitiones laterum rectæ lineæ a e, b f, c d. perspicuum est centrum grauitatis trianguli a b c esse ipsum g; in quo uidelicet lineæ illæ coeunt, ex duodecima primi libri de æquiponderantibus: & triangula a g b, b g c, c g a esse æqualia inter se se. sunt enim duo triangula a e b, a e c æqualia; quòd bases æquales habeant, & ab eodem sint uertice: & duo item triangula g e b, g e c æqualia. quare si à triangulo a e b auferatur triangulum g e b: & à triãgulo a e c auferatur ipsum g e c: erunt residua æqualia, uidelicet triangula a g b, a g c. Et eadem ratione, si à duobus triangulis æqualibus b f c, b f a auferantur æqualia g f c, g f a; erit reliquum triangulum b g c reliquo b g a æquale. & per communem conceptionem triangulum b g c æquale triangulo a g c: & omnia triangula a g b, b g c, c g a inter se se æqualia. triangulum ergo b a g duplum est trianguli b g e; & propterea basis a g dupla ipsius g e. non aliter monstrabimus lineam b g duplam lineæ g f: & lineam c g ipsius g d duplam. Itaque si per g ducatur linea æquidistans ipsi b c, quæ sit h k: erit & a h dupla lineæ h b, & a k dupla k c. Quare generaliter, si quodlibet latus trianguli secetur ita, ut portio ad uerticem dupla sit portionis ad basim: & per punctum sectionis ducatur linea æquidistans basi; centrum grauitatis ipsius trianguli erit in linea ducta, atque in eius puncto medio: quod monstrare oportebat.* 1. sexti. 2. sexti.




## COROLLARIVM.

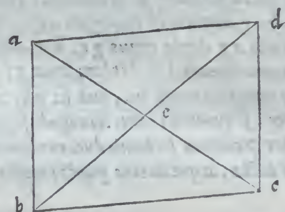
Ex his sequitur uniuscuiusque trianguli centrum grauitatis esse in linea ab angulo ad dimidiam basim ducta; & in eo lineæ puncto, quo ipsa sic diuiditur, ut portio ad uerticem dupla sit portionis ad basim.

Si igitur b d c trianguli suspensio, quæ est ad b c, soluatur; & suspendatur ad e: manebit triangulum, ut nunc habet. unumquodque enim suspensorum, ex quo puncto constitutum est, manet; cum in linea perpendiculari sit punctum suspensionis, & centrum grauitatis suspensi; quod etiam est demonstratum.] *Secetur rursus linea e c in l ita, ut c l dupla sit ipsius l e: ducaturq́; l m æquidistans b d: & secetur bifariam in puncto n. erit eadem ratione trianguli e c k centrum grauitatis ipsum n: & ducta linea à puncto c ad dimidium lateris b d, in quo sit o, transibit per utraque puncta n h; est enim utriusque triangulorum b c d, e c k centrum grauitatis in linea c o, ex undecima primi de æquiponderantibus. Quòd si fiat, ut b l ad l c, ita n h ad h p: erit ipsum p centrum grauitatis trapezij b e k d. nam quoniam c e posita est ipsius e b dupla: & c l etiam dupla ipsius l e: habebit b c ad c e eandem proportionem, quam c e ad c l. quare triangulum b c d ad triangulum e c k sibi simile habebit eam, quam linea b c ad lineam c l: & diuidendo; conuertendo ue, triangulum e c k ad trapezium b e k d, eam habebit, quam linea c l ad lineam l b; hoc est, quam linea p h ad h n. & quoniam à triangulo b c d abscinditur triangulum e c k, quod non habet idem centrum grauitatis: erit centrum residui,* C 19. sexti.

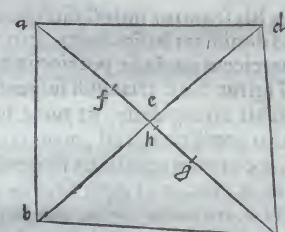


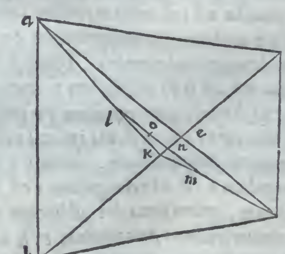
*hoc eſt trapezij b e k d in linea n h; atque in puncto p: cum ſit p h ad h n, ut triangulum e c k ad*
*trapezium b e k d, ex ſexta eiuſdem de æquiponderantibus. Dico igitur triangulum b c d, ſi ſuſpen*
*datur ad e punctum exiſtens in eadem perpendiculari, in qua eſt centrum grauitatis h, manſu-*
4. ſexti. *rum, ut nunc manet, ducta nanque per p linea q p r, æquidiſtanti ipſi b d, erit ob triangulorum*
19. quinti. *ſimilitudinem, ut q c ad c p, ita e c ad c h: & ita reliqua q e ad reliquam p h. Rurſus ut e c ad*
*c h, ita l c ad c n: & reliqua e l ad h n. quare q e ad p h erit, ut e l ad h n: & permutando, q e*
*ad e l, ut p h ad h n, hoc eſt ut triangulum e c k ad trapezium b e k d. ſi igitur in libra q e l, cuius*
*centrum ſuſpenſionis ſit e, intelligatur ad ipſum quidem q ſuſpenſum eſſe trapezium b e k d; ad l*
*uero ſuſpenſum triangulum e c k: æquiponderabit alterum alteri; quod magnitudines ex altera par*
*te reſpondeant ipſis longitudinibus ex demonſtratis ab Archimede in quarta, & quinta primi de*
*æquiponderantibus, & à Iordano in octaua libri de ponderibus. manebit ergo libra horizonti æqui-*
*diſtans: & idcirco latus trapezij b e, & trianguli e c manebit. quare ſi totum triangulum b c d ſu*
*ſpendatur ad e; erit b e c latus eius inſtar libræ: & manebit, ut manet; quod demonſtrare uoleba-*
*mus. Poterant hæc ſufficere ad figuram propoſitam. uerum quoniam Archimedes uniuerſe pro-*
*nunciauit illud contingere, & nos uniuerſalem afferemus demonſtrationem in omnibus figuris recti*
*lineis. prius tamen, ut id commodius fiat, uiſum eſt docere, quo pacto in omni figura rectilinea*
*centrum grauitatis inueniatur. nam Archimedes in libro de æquiponderantibus elementa tan-*
*tum tradidit.*

Cuiuslibet figuræ rectilineæ centrum grauitatis iuuenire.



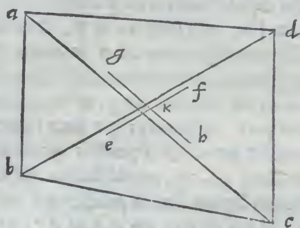

*IN triangulo, qua ratione illud iaucniatur ſatis*
*conſtat cx duodecima primi de æquiponderantibus, &*
*ex ijs, quæ nos ſupra ſcripſimus: Sed ſit quadrilaterum*
*a b c d, cuius oporteat centrum grauitatis inuenire; &*
*& ducantur diametri a c, b d ſecantes ſeſe in e. Et ſi*
*quidem quadrilaterum parallelogrammum ſit, centrú*
*grauitatis eius erit in puncto e; quod oſtendit Archime*
*des in octaua eiuſdem libri. Si uero non ſit parallelo-*
*grammum; & tamen punctum e ſecet ipſam b d dia-*
*metrum in partes æquales: diuidatur linea a e in f, ita*
*ut a f ſit dupla f e: & ſimiliter linea c e diuidatur in*
*g, ut c g ipſius g e ſit dupla: diuidatur quoque g f in h,*
*ut g h æqualis ſit ipſi f e. Dico iam punctum h cen-*
*trum eſſe grauitatis quadrilateri a b c d. eſt enim f cen*
*trum grauitatis trianguli a b d: & g item grauitatis*
15. quinti. *centrum trianguli c b d, ut ſupra oſtendimus. habet au*
*tem f e ad e g eam proportionem, quam a e ad e c;*
*cum ſit f e tertia pars ipſius a e, & e g tertia ipſius e*
1. ſexti. *c; & triangulum a e d ad triangulum e d c eam habet*
*proportiouem, quam linea a e ad lineam e c: & ean-*
12. quinti. *dem habet triangulum a e b ad triangulum e b c. to-*
*tum ergo triangulum a b d ad totum c b d habebit ean*
*dem, quam f e ad e g; hoc eſt quam g h ad h f: eſt e-*
*nim h f ipſi e g æqualis; cum ſit g h poſita æqualis ip*
*ſi f e. quarc centrum magnitudinis ex his triangulis có-*
*poſitæ, uidelicet quadrilateri a b c d erit in linea f g,*
*& in puncto h, ex quarta, & quinta primi de æqui-*
*ponderantibus. Quòd ſi punctum e ſecet diametrum*
*b d in partes inæquales: ſecetur ca bifariam in k: &*
*ducantur lineæ a k, c k: diuidanturq; in l m pun-*
*ctis; ita ut ſit a l dupla ipſius l k; & c m item dupla*
*m k: & iungantur l m linea, quæ ſecet b d in n; &*
*fiat m o æqualis ipſi l n. Dico punctum o eſſe centrum*
3. ſexti. *grauitatis ipſius quadrilateri. Quoniam enim poſui-*



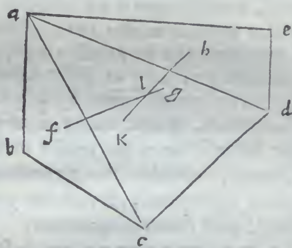



mus k l ad l a eam habere proportionem, quam k m ad m c: æquidistabit linea l m lineæ a c; & erit triangulum k n l simile triangulo k e a; & triangulum k n m simile ipsi k e c. est igitur l n ad n k, ut a e ad e k: & n k ad n m, ut e k ad e c. quare ex æquali l n ad n m, ut a e ad e c. ut autem l n ad n m, ita m o ad o l: & ut a e ad e c, ita triangulum a b d ad triangulū c b d. ut ergo triangulum a b d ad triangulum c b d, ita m o ad o l. Itaque cum sit l centrum grauitatis trianguli a b d: & m centrum trianguli c b d; eadem ratione totius quadrilateri centrum grauitatis erit in linea l m, & in o puncto.

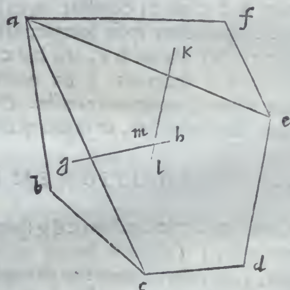
ALITER. Sit quadrilaterum a b c d; ducanturq; a c, b d: & sit trianguli a b c centrum grauitatis e: trianguli autem a d c centrum sit ipsum f. erit centrum magnitudinis ex his compositæ in linea ducta ab e ad f. rursus sit g centrum grauitatis trianguli a d b; & h centrum trianguli d b c; & ducatur g h secans lineam e f in k. erit & eiusdem magnitudinis, hoc est quadrilateri a b c d centrum grauitatis in linea g h. quare in puncto k; in quo uidelicet ipsæ lineæ conueniunt.




Sit pentagonum a b c d e; & ducantur a c, a d: trianguli autem a b c centrum grauitatis sit f: & quadrilateri a c d e sit centrum g: & iungantur f g. rursus trianguli a d e centrum sit h; & quadrilateri a b c d centrum k; & ducatur h k secans lineam f g in l. Dico l centrum esse grauitatis ipsius pentagoni: erit enim totius magnitudinis compositæ centrum in linea f g, & in linea h k. ergo in puncto l; in quo scilicet ipsæ conueniunt.



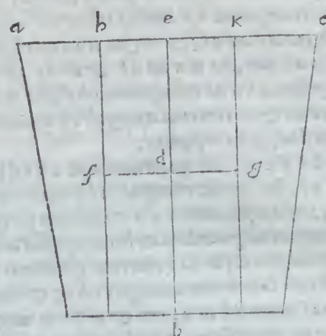

Sit Hexagonum a b c d e f: & ducantur a c, a e: sitq; trianguli a b c centrum grauitatis g: & pentagoni a c d e f centrum sumatur, quod sit h: & ducatur g h. rursus centrum trianguli a e f sit k; & pentagoni a b c d e sit l: & ducatur k l, quæ secet ipsam g h in m. erit eadem ratione punctum m centrum grauitatis totius hexagoni. Non aliter in heptagono, octagono, & in alijs, quæ deinceps sunt, centrum grauitatis inuenietur: quod facere oportebat.

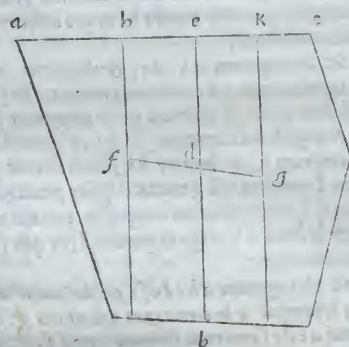


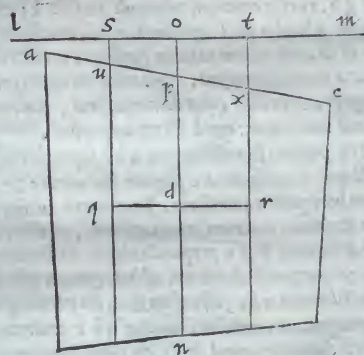

His positis, sit rectilineum a b c supra horizontem erectum: ita ut latus a c sursum statuatur: & sit primum horizonti æquidistans. Inueniatur autem ex ijs, quæ diximus, centrum grauitatis eius, quod sit d: & per d ducatur b d e perpendicularis ad lineam a c, quæ & perpendicularis erit ad horizontem ipsum. Dico rectilineum a b c suspensum in e, ita permansurum, ut nunc manet. rectilinei nanque a b e centrum grauitatis sumatur, quod sit f: & sumatur item g centrum rectilinei e b c: & iungantur f g: à punctis uero f g ad lineam a c ducantur f h, g k æquidistantes ipsi b e. transibit igitur linea f g per d: & habebit f d ad d g proportionem eam, quam rectilineum e b c ad rectilineum a b e, ex sexta primi de æquiponderantibus. & rursus quam proportionem habet f d ad d g, eam habebit h e ad e k. si enim æquidistent lineæ f g, a c: erit h e æqualis ipsi f d; & e k ipsi d g. si uero non æquidistent: coibunt inter sese, uel ad partes a, uel ad partes e. quocunque autem modo id fiat: secabuntur ipsæ secundum eandem proportionem à lineis æquidistantibus h f, e d, k g, ut supra ostendimus: & idcirco erit h e ad e k, ut f d ad d g; hoc est, ut rectilineum e b c ad ipsum a b e. si ergo in libra h e k rectilineum

quidem

quidem a b c suspendatur ad punctum h: rectilineum uero e b c ad k; æquiponderabunt inter sese, ex iam dictis: & manebit libra, ut manet. Quare si totum rectilineum a b c ex his constans suspendatur ad e: & ipsum quoque permanebit in eodem situ, in quo positum fuerat. Quòd si latus a c non æquidistet horizonti: intelligatur ipsa linea l m horizonti æquidistans; & rursus per d centrum grauitatis ducatur linea n d o perpendicularis ad lineam l m, quæ secet a c in p. Dico idem rectilineum suspensum ad p in eodem situ permansurum, in quo nunc manet. sumatur enim q centrum rectilinei a n p, & r centrum rectilinei p n c: iungaturq; q r linea; quæ & ipsa transibit per d: & à punctis q r ducantur ad l m lineæ q s, r t, æquidistantes ipsi n d o, & secantes lineam l m in punctis u x. erit s o ad o t, ut q d ad d r; & q d ad d r, ut rectilineum p n c ad rectilineum a n p. quare s o ad o t erit, ut rectilineum p n c ad ipsum a n p. ex quibus sequitur in libra s o t, rectilineum a n p suspensum ad u ex puncto s æquiponderare rectilineo p n c ad x ex ipso t suspenso; & propterea totum rectilineum suspensum ad p ita permansurum, ut nunc manet. unumquodque igitur suspensorum ex quo puncto constitutum est, manet, si in eadem linea perpendiculari sit punctum suspensionis, & centrum grauitatis suspensi: quod fuerat ostendendum.




D Et quoniam æquiponderant spatium quidem f suspensum ad a; triangulum autem b d c ad e; constat ea ex altera parte respondere ipsis longitudinibus, atque esse ut a b ad b e, ita b d c triangulum ad f spatium.] *Ex quarta, & quinta primi de æquiponderantibus, & octaua Iordani de ponderibus, ut sæpius est dictum.*

## IN PROPOSITIONEM VII.

A Constat & triangulum c d g spatii f triplum esse.] *Colligitur hoc ex decimanona quinti. cum enim totum totius sit triplum; & ablatum ablati item triplum; & reliquum reliqui triplum erit.*

## IN PROPOSITIONEM IX.

A Demonstrabitur hoc similiter antecedenti.] *Sumpto enim centro grauitatis trianguli c d k, quod sit h, & ducta h g æquidistanti ipsi d e, si suspensio fiat ad g: manebit triangulum, ut nunc manet, ex iam demonstratis; & habebit ad spatium f eandem proportionem, quam habet linea a b ad b g. quare triangulum c d k maius erit ipso f; quòd linea a b maior sit linea b g. & cum b g sit maior ipsa b e: erit & f spatium maius spatio l.*

IN

## IN PROPOSITIONEM X.

A

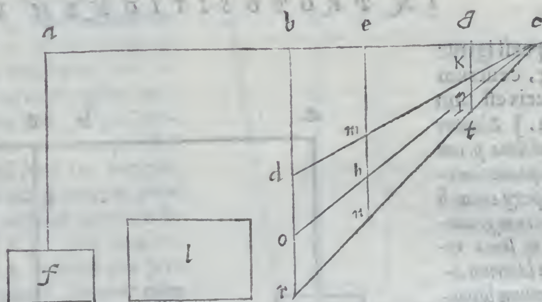
Trapezii igitur b d k g, centrum grauitatis est punctum h.] *Elicitur hoc ex ultima primi de æquiponderantibus. trapezij enim b d k g centrum grauitatis est in linea recta, quæ laterum æquidistantium bipartitiones iungit; atque in eo lineæ puncto, quo ita diuiditur, ut pars terminum habens minus laterum æquidistantium ad reliquam partem, eam proportionem habeat, quam utraque linea; æqualis duplæ maioris unà cum minori ad duplam minoris, unà cum maiori, secetur igitur latus b d bifariam in o: & ducatur o c secans g k in p. erit ut linea b o ad o c, ita g p ad p c, propter triangulorum similitudinem; & ut o c ad o d, ita p c ad p k. quare ex æquali ut b o ad o d; ita g p ad p k. sunt autem b o, o d æquales. & ipsæ ergo g p, p k æquales erunt. Eadem ratione ostendemus & lineam e n bifariam secari ab ipsa o c, uidelicet in puncto h. & cum p h ad h o eam proportionem habeat, quam g e ad e b, ut supra ostendimus, hoc est, quam dupla d b unà cum ipsa k g ad duplam k g unà cum d b: erit ipsum h centrum grauitatis trapezij b d k g.*

4. sexti.

## IN PROPOSITIONEM XI.

Similiter iis, quæ dicta sunt, ostendetur spatium f minus esse spatio l.] *Secetur enim b c in e, ita ut g e ad e b eam habeat proportionem, quam dupla d r unà cum k t, habet ad duplam k t unà cum d r: & per e ducatur æquidistans ipsi b d r, quæ sit e m n: & diuidatur e m n bifariam in puncto h. erit trapezij d k t r. centrum grauitatis ipsum h. nam ducta o p linea, quæ laterum æquidistantium bipartitiones iungat, transibit per h, ut proxime ostendimus: & p h ad h o eam proportionem habebit, quam g e ad e b. trapezium igitur d k t r si à punctis b g soluatur; & suspendatur ad e: manebit in eodem situ; & æquiponderabit spatio f. quare*

*f. quare ut b a ad b e, ita erit trapezium d k t r ad f spatium. Quòd cum b a ad b e maiorem proportionem habeat, quàm ad b g: & trapezium d k t r ad spatium f maiorem habebit,*
9.quinti. *quàm ad l. spatium ergo f minus erit l spatio.*




## IN PROPOSITIONEM XIIII.

A Quare triplum erit b d e triangulum spatii r q z 9 λ.] *Ex sexta huius.*

B Eandem habet proportionem b c ad b e, quam s e ad e u.] *Est enim ex quinta huius b e, ad e c, ut e u ad u s: & conuertendo e c ad b e, ut u s ad e u. quare componendo b c ad b e, ut s e ad e u.*

C Quare & b a ad b e habet eandem, quam d e trapezium ad ipsum k e:] *Cum igitur*
1. sexti. *sit ut b c, hoc est b a ad b e, ita s e ad e u: ut autem s e ad e u, ita triangulum s e c ad triangu-*
11.quinti. *lum u e c: erit ut b a ad b e, ita triangulum s e c ad triangulum u e c. præterea cum sit ut s e ad*
4. sexti. *e u, ita d b ad b k, ob similitudinem triangulorum: & ut d b ad b k, ita triangulum d b c ad triangulum k b c: erit ut b a ad b e, ita triangulum d b c ad triangulum k b c. Quare sicut totum triangulum d b c ad totum k b c, ita pars ad partem; hoc est triangulum s e c ad triangulum u e c.*
19.quinti. *& reliquum igitur trapezium d e ad reliquum k e erit, ut triangulum d b c ad triangulum k b c; hoc est, ut b a ad b e.*

D Maius erit k e spatium spatio r; hoc enim ostensum est.] *In decima huius.*

E Et est ut b a ad b e, ita f s trapezium ad trapezium f u.] *Est enim ut a b ad b e, ita triangulum s e c ad triangulum u e c; quod nos supra ostendimus. ut autem triangulum s e c ad*
4. sexti. *triangulum u e c, ita triangulum t f c ad ipsum ς f c; quòd linea t f ad f ς sit, ut s e ad e u. tra-*
19.quinti. *pezium igitur reliquum s f ad reliquum f u erit, ut triangulum s e c ad triangulum u e c. hoc est ut a b ad b e.*

F Spatium igitur q trapezio quidem l f minus est, trapezio autem f u maius; nanque & hoc ostensum est.] *In duodecima huius.*

G Similiter etiam λ spatium triangulo x i c minus est, & triangulo c i o maius.] *Nam ut b i ad i c, ita i o ad o x, ex quinta huius: & conuertendo, componendo ue, ut b c, hoc est, ut a b ad b i, ita x i ad i o: ut autem x i ad i o, ita triangulum x i c ad triangulum o i c. quare ut a b ad b i, ita triangulum x i c ad triangulum o i c. Et quoniam triangulum x i c æquiponderat λ spatio: & quam proportionem habet a b ad b i, eandem triangulum x i c habet ad triangulum o i c: erit ex octaua huius spatium λ minus triangulo x i c, maius autem triangulo o i c.*

## IN PROPOSITIONEM XV.

A Quare d b c triangulum triplum erit spatii r q z 9 λ.] *Ex septima huius.*

B Similiter ut prius ostendetur, b u trapezium spatio r maius.] *Ex undecima huius.*

C Et trapezium h e maius spatio q: trapezium autem f u minus eodem.] *Ex tertiadecima. Quod uero reliquum est, ut in proxima propositione concludemus.*

## IN PROPOSITIONEM XVI.

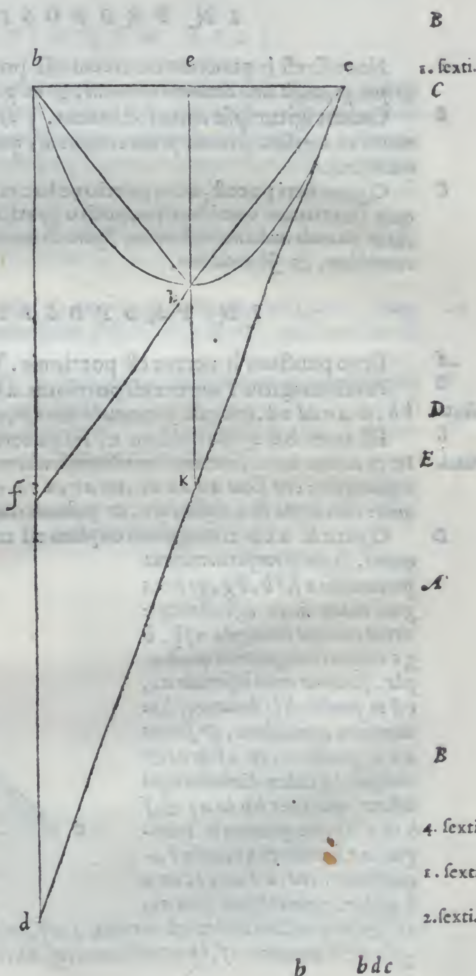
Poteſt autem ſumi aliquod ſpatium minus dicto exceſſu, quod ſit pars trianguli b d c.] *Nam ſi exceſſu quo b h c portio excedit ſpatium f, ſibi ipſi eouſque coaceruetur, quouſque ſuperet triangulum b d c: diuidaturque dictum triangulum in tot partes æquales, quoties exceſſus ſibi ipſi fuerit coaceruatus: erit una ex illis partibus minor ipſo exceſſu, ut docetur in quarta propoſitione libri de lineis ſpiralibus. poſſumus autem & idem illud aſſequi ex prima decimi elementorum. expoſitis enim duabus magnitudinibus inæqualibus, uidelicet triangulo b d c, & exceſſu, quo b h c portio excedit ſpatium f, ſi à triangulo auferatur dimidium: & eius, quod reliquum eſt, rurſus dimidium auferatur: idq; continenter fiat: tandem relinquetur quædam magnitudo minor dicto exceſſu. erit autem ea, & pars b d c trianguli: & ipſum metietur ſecundum numerum; qui in dupla proportione ab unitate tantum diſtat, quantus eſt numerus ablationum. Vt exempli gratia ſi ablatio ter facta fuerit: erit ea pars octaua; ſi quater, ſextadecima: & deinceps eodem modo.* A

Erit & b e pars eadem ipſius b d.] *Quam enim proportionem habet triangulum b c e ad ipſum b c d, eandem a e habet ad b d.* B 1. ſexti.

Spatium ergo f minus eſt trapeziis m l, x r, p h, & triangulo p o c.] *Nam cum triangulum b c e, & ſpatium f ſint minora portione b h c: ſi ab ea auferrems ſpatium æquale triangulo b c e: eſſet f ſpatium minus eo, quod relinqueretur. nunc autem cum à portione auferatur minus, quàm ſit triangulum b c e; auferuntur enim partes trapeziorum m e, u l, h r, h o, & trianguli c o s, quibus omnibus eſt æquale b e c triangulum: multo magis ſequitur, ut ſpatium f minus ſit reſiduo ipſius portionis, quod conſtat trapezijs m l, x r, p h, & p c o triangulo.* C

Oſtenſum eſt enim maius, quàm triplum.] *In decima quarta huius.* D

Et dictorum ſpatiorum minus, quàm triplum.] *In eadem decima quarta.* E




## IN PROPOSITIONEM XVII.

Recta linea ab h ducta æquidiſtans diametro bifariam ſecat ipſam b c, & b c æquidiſtans eſt lineæ ſectionem tangenti in h.] *Fit enim ipſa h e portionis diameter. quare ex prima huius ſequitur, b c æquidiſtare lineæ coni ſectionem in puncto h tangenti.* A

Triangulum b d c quadruplum eſt b h c trianguli.] *Sequitur nanque ex ſecunda huius, lineas e h, h k æquales eſſe. quare ducta c h & producta ad ipſam b d in f, erunt & b f, f d æquales, ob ſimilitudinem triangulorum: & propterea ipſa triangula c b f, c f d æqualia. Rurſus cum ſint c e, e b æquales: & ipſæ c h, h f æquales erunt: & triangula æqualia b h c, b h f. eſt igitur triangulum* B 4. ſexti. 1. ſexti. 2. ſexti.

*bdc ipsius bhc quadruplum, ut proponebatur.*

C Portionum quæ recta, & curua linea continentur &c.] *Hactenus ostendit Archimedes, quomodo paraboles quadratura per mechanicas, ut ipse ait, rationes fuerit inuenta. Nunc rursus eandem ipsam rationibus geometricis demonstrare aggreditur.*

## IN PROPOSITIONEM XVIII.

A Constat lineam ac æquidistantem esse ei, quæ in b coni sectionem contingit.] *Ex prima huius.*

## IN PROPOSITIONEM XIX.

A Manifestum est eandem habere proportionem bd ad bh longitudine, quam ad ad fh potestate.] *Ex tertia huius.*

## IN PROPOSITIONEM XX.

A Necesse est b punctum uerticem esse portionis. æquidistans est igitur &c.] *Ex ijs quæ præmisit ante decimam octauam, & ex prima huius.*

B Cadent igitur ipsæ extra sectionem.] *Si enim intra sectionem caderent: coirent cum diametro ex uigesima secunda primi conicorum, quod est absurdum; cum ponantur diametro æquidistantes.*

C Quare fieri potest, ut in portione hac multiangula figura describatur; ita ut reliquæ portiones quolibet proposito spatio sint minores.] *Ex prima decimi, quo pacto in secunda undecimi describitur figura in circulo, & à nobis in ellipsi, propositione quinta de conoidibus, & sphæroidibus.*

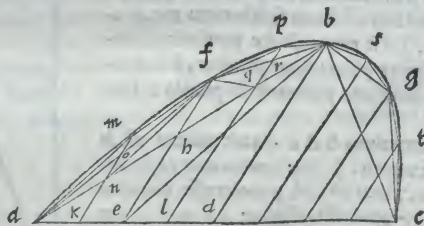
## IN PROPOSITIONEM XXI.

A Ergo punctum b uertex est portionis.] *Ex decima octaua huius.*

B Punctum igitur f uertex est portionis afb.] *Ex eadem decima octaua. est enim ah ad*
2. sexti. *hb, ut ae ad ed. quæ cum sint æquales inter se, & ipsæ ah, hb æquales erunt.*

C Est enim bd ipsius quidem ef sesquitertia; ipsius autem eh dupla.] *Primum pa-*
4. sexti. *tet ex decima nona: secundum uero demonstrabitur hoc pacto. Quoniam triangula abd, ahe, sunt æquiangula: erit sicut ad ad db, ita ae ad eh: & permutando sicut ad ad ae, sic db ad eh. quare cum dupla sit ad ipsius ae, ex positione: dupla quoque erit, & db ipsius eh.*

D Quare & aeb triangulum duplum est trianguli fba.] *Colligitur hoc ex duodecima quinti. Quòd si rursus in reliquis portionibus af, fb, bg, gc triangula eodem modo describantur: erunt utraque triangula afb, bgc eorum triangulorum quadrupla. secentur enim bifariam ae, ed in punctis kl: ducaturq; km diametro æquidistans, & secans ah in puncto n; & af in o: & ducatur lp itidem diametro æquidistans, quæ secet hb in q; & fb in r. Itaque quoniam in triangulo aef ducta est ko, ipsi ef æquidistans: erit ao ad of, ut ak ad ke. æquales igitur sunt ao, of: & m punctum uertex est portionis amf, ex decima octaua huius. Rursus quoniam in triangulo adb ducuntur ef, lp æqnidistantes ipsi db: erit ut el ad ld, ita hq ad qb. quare æquales erunt*



*erunt h q, q b: idcircoq́; & ipsæ f r, r b æquales: & punctum p uertex portionis f p b. triangula igitur a m f, f p b eandem basim, & altitudinem eandem habebunt portionibus, in quibus describuntur. Dico triangulum a f b quadruplum esse triangulorum a m f, f p b. est enim linea f h diameter uidelicet portionis a f b, sesquitertia lineæ m n, ex decima nona huius; & dupla ipsius n o. quare & n o ipsius o m dupla: & ob eandem caussam q r dupla est ipsius r p. ductis igitur lineis f n, n q, erit triangulum f n o duplum trianguli f o m: & triangulum a o n duplum trianguli a o m.* 1. sexti. *quare triangulum a n f duplum erit ipsius a m f. est autem a n f quarta pars trianguli a f b. Eadem* 12. quinti. *quoque ratione ostendetur, & triangulum f b q, quod item est quarta pars eiusdem trianguli a f b, duplum esse ipsius f p b. totum ergo triangulum a f b, triangulorum a m f, f p b quadruplum erit. Non aliter ostendemus triangulum b g c quadruplum esse triangulorum b s g, g t c, in reliquis portionibus b g, g c descriptorum. ex quibus sequitur, utraque triangula a f b, b g c triangulorum* 12. quinti. *omnium a m f, f p b, b s g, g t c quadrupla esse: quod demonstrare oportebat.*

Similiter quoque ostendentur triangula amf, fpb, bsg, gtc quadrupla esse triangulorum eorum, quæ in reliquis portionibus describuntur: & ita deinceps in aliis.

## IN PROPOSITIONEM XXII.

Similiter autem ostendetur triangula in reliquis portionibus descripta, eandem basim habentia ipsis, & altitudinem eandem, spatio h æqualia esse.] *Ostendimus enim in antecedenti triangula a d b, b e c, triangulorum in reliquis portionibus descriptorum quadrupla esse. Quare cum spatium q ponatur quadruplum spatij h: erunt triangula in reliquis portionibus descripta, ipsi h spatio æqualia.*

## IN PROPOSITIONEM XXIIII, ET VLTIMAM.

Vnde sequitur omnia spatia minora esse, quàm sesquitertia maximi spatii.] *Sunt enim omnia spatia unà cum tertia parte minimi spatij sesquitertia maximi; quod proxime est demonstratum.* A

Et k spatium sesquitertium spatii f.] *Positum nanque est f spatium æquale triangulo a b c, & spatium k eiusdem trianguli a b c sesquitertium.* B

Et quoniam spatium k excedit fg, h i spatia minori excessu, quàm sit i.] *Excedit enim tertia tantum parte ipsius i spatij: quod etiam est demonstratum.* C

# EIVSDEM COMMENTARIVS

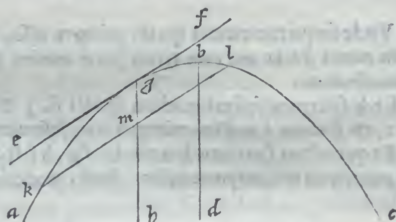
## IN LIBRVM DE CONOIDIBVS, ET SPHAEROIDIBVS.

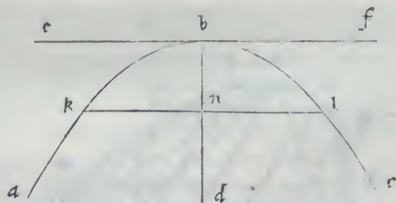
A  I RECTANGVLI coni sectio &c.] *Diximus supra rectanguli coni sectionem posteriores parabolen appellasse, atque huius ipsius caussam ex Eutocio attulimus.*

B Conoides rectangulum appellari.] *Nos non ineptæ, ut opinor, ob illud ipsum conoides parabolicum appellabimus, & eodem modo conoides hyperbolicum, quod obtusiangulum uocat Archimedes. Quæ utraque non aliter, quàm parabole, & hyperbole, ita intelligi oportet, ut in infinitum augeantur.*

Conoidea in infinitū augentur.

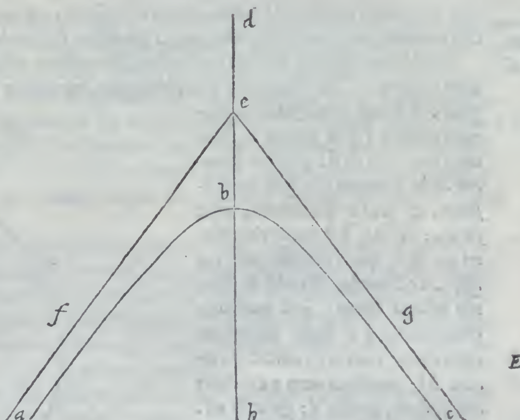
C Verticem punctum, in quo alterum planum conoides contingit; axem uero rectam lineam intra portionem receptam, ex ea, quæ per uerticem portionis ducta sit axi conoidis æquidistans.] *Videntur hæc dicta de portione conoidis rectanguli, seu parabolici abscissa plano non erecto super axem: ea enim, quæ abscinditur plano super axem erecto, uerticem habet eundem, quem conoides; & axem axis conoidis partem, intra portionem receptam. Hoc autem idcirco contingit in portione conoidis parabolici de axe, quòd in portione paraboles idem contingat de diametro: nam si parabole abscindatur linea recta, quæ cum diametro eius rectos contineat angulos; uertex idem est in utraque: diameter uero portionis, diametri sectionis pars est. sin minus, uertex portionis est punctum illud, in quo altera linea parabolen tangit, lineæ abscindenti æquidistans; diameter uero linea, quæ ab eo puncto ducitur æquidistans ipsi paraboles diametro: quod ex quadragesima sexta primi conicorum Apollonij abunde colligitur. Vt autem ea, quæ hoc loco dicuntur, dilucidiora fiant. Sit conoides parabolicum a b c, cuius axis b d: & planum cuius recta linea e f, illud tangat in puncto g: & à g demittatur linea g h, æquidistans ipsi b d: rursus ducatur aliud planum conoides abscindens, æquidistansq; alteri k l; cui linea g h occurrat in puncto m. erit portio conoidis parabolici k g l abscissa plano non erecto super axem; cuius basis superficies circa diametrum k l; uertex uero g; & axis g m. Quòd si planum e f tangat conoides in b puncto: ducto altero plano ei æquidistanti k l, cui axis b d occurrat in n, erit k b l portio abscissa plano super axem erecto; & cius basis superficies k l; uertexq; b: & axis b n. Et si idem conoides parabolicum a b c scindatur plano per axem, & per ipsam g h ducto: fiet sectio a b c parabole figuram describens, ut infra ostendetur: & erit paraboles portionis k g l, basis linea k l; uertex g; & diameter g m. & similiter portionis paraboles k b l, basis k l; uertex b; & diameter b n.*



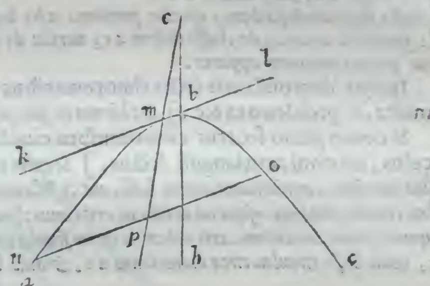

D Si in eodem plano sint obtusianguli coni sectio, eiusq; diameter, & lineæ, quæ sunt proximæ coni obtusianguli sectioni, &c.] *Lineæ sectioni coni obtusianguli proximæ apud Archimedē sunt, ut opinor, quas Apollonius appellat* ἀσυμπτώτους τῇ τομῇ, *hoc est non coeuntes cum sectione. Sit enim coni obtusianguli sectio, seu hyperbole a b c: & eius figuræ latus transuersum b d bifariam secetur in puncto e; quod Apollonius hyperboles centrum uocat: atque ab eo ducantur lineæ non coeuntes cum sectione e f, e g, ut idem docuit Apollonius in prima secundi conicorum.*

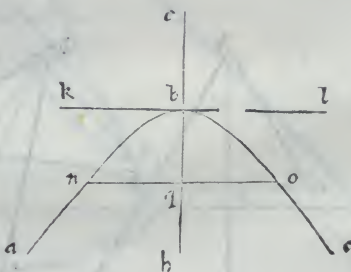
*conicorum. Si igitur omnes hæ lineæ ſint in eodem plano: & manente diametro b h, circumducatur planum qnouſque redeat in eum locum, à quo cœpit moueri: manifeſtum eſt liceas e f, e g conum comprehendere æquicrurem, quem Archimedes conum conoides continentem appellat; cuius uertex eſt e, & axis e h: & inſuper hyperbolen a b c comprehendere figuram, quam ille conoides obtuſiangulum, nos hyperbolicum dicemus; cuius uertex b, & axis b h: linea uero e b erit, quam ad axem adiectam uocat Archimedes, Apollonius in hyperbole eam, quæ ex centro appellat.*




Et ſi obtuſiangulum conoides planum contingat &c.] E

*Sit conoides obtuſiangulum, ſeu hyperbolicum a b c, ut in proxima figura: atque ipſum tangat planum k l in puncto m: intelligatur item aliud planum ei æquidiſtans; & conoides ſecans, n o: ductaq; e m linea, & producta occurrat plano n o in p. erit portionis conoidis m n o abſciſſæ plano ſuper axem non erecto, baſis ſuperficies circa diametrum, n o; uertex m; & axis m p; linea uero ad axem adiecta m e. Sed ſi planum k l tangat conoides in puncto b: ducaturq; aliud planum ei æquidiſtans n o, cui axis b h occurrat in q: erit portionis n b o abſciſſæ plano ſuper axem erecto, baſis ſuperficies circa diametrum n o; uertex b; & axis b q; lineaq; ad axem adiecta, eadem, quæ conoidis, hoc eſt ipſa b e. Fit autem hoc in portione conoidis hyperbolici; quòd & in portione hyperboles idẽ fiat. Si enim conoides hyperbolicum a b c ſecetur plano per axem, perq; lineam e p ducto: fiet a b c ſectio, hyperbole, quæ figuram deſcribit, ut etiam oſtendemus: & erit n m o hyperboles portionis, baſis n o; uertex m: & m p diameter; linea uero m e ea, quæ ex centro: quod ex quadrageſima ſeptima, & quinquageſima primi conicorum apertiſſime conſtat: & ita portionis hyperboles n b o, baſis n o; uertex b; diameter b q; & b e ea, quæ ex centro.*



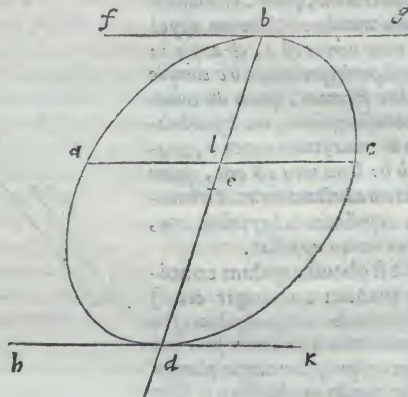




Omnia conoidea rectangula ſunt ſimilia, obtuſiangulorum uero conoideon &c.] F

*Parabolæ enim omnes ſimiles ſunt, à quibus rectangula, hoc eſt parabolica conoidea deſcribuntur* Parabolæ oẽs ſimiles

Hyperbolæ similes Conoidea hyperbolica similia. *tur. hyperbolæ uero similes dicuntur, quarum coniunctæ diametri inter se, uel quarum figuræ latera eandem habent proportionem. harum autem lineæ non coeuntes cum sectione æqualem continent angulum: & idcirco similem conum describunt, conoides ipsum continentem; rectéq; hyperbolica conoidea similia dicuntur illa, quæ à similibus sectionibus ortum habent.*

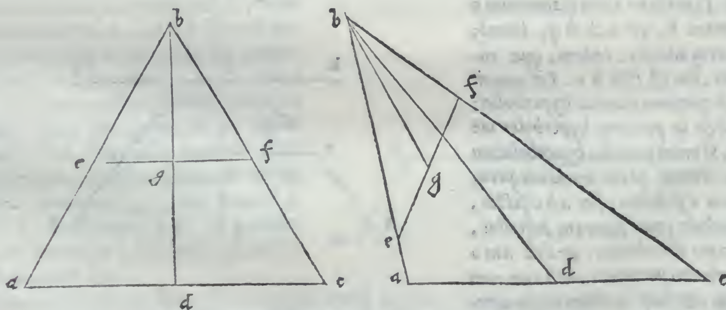
G Et si sphæroidum figurarum quamlibet plana æquidistantia contingant, quæ ipsas non secent.] *Sit sphæroides siue oblongum, siue latum a b c d, cuius centrum e: & ipsum tangant duo plana æquidistantia; planum quidem f g in puncto b; planum uero h k in d: & item ducatur aliud planum illis ipsis æquidistans, & secans sphæroides, quod sit a c: ductaq; b d occurrente plano a c in l, quæ transibit per e, ut ipse Archimedes ostendit in decima octaua huius, erit portionis sphæroidis a b c basis superficies circa diametrum a c; uertex b; & axis b l: portionis uero a d c basis erit eadem; uertex d; & axis d l. Huius caussa est, quòd in ellipsi eadem eueniunt. Secetur enim sphæroides plano per axem ducto, & per lineam b d. fiet sectio a b c d*




*ellipsis figuram describens; & eius portionis a b c basis erit linea a c; uertex b; & diameter b l: portionis autem a d c, basis eadem a c; uertex d; & diameter d l, ut ex quadragesima septima primi conicorum apparet.*

H Itaque demonstratis dictis theorematibus, per ea ipsa inueniuntur theoremata multa, & problemata &c.] *De his nos in fine nonnulla conscribemus.*

I Si conus plano secetur cum omnibus eius lateribus coeunti: sectio, uel erit circulus, uel coni acutianguli sectio.] *Si enim conus plano secetur coeunti cum omnibus ipsius lateribus, æquidistanti autem basi, aut ei subcontrarie posito: sectio circulus erit, & eius pars hoc circulo contenta usque ad uerticem erit conus: quod demonstrauit Apollonius in quarta, & quinta primi conicorum. erit autem is conus similis cono, à quo abscinditur. Sit nanque conus a b c, cuius basis circulus circa diametrum a c, & axis b d: seceturq; primum plano basi æquidistanti,*



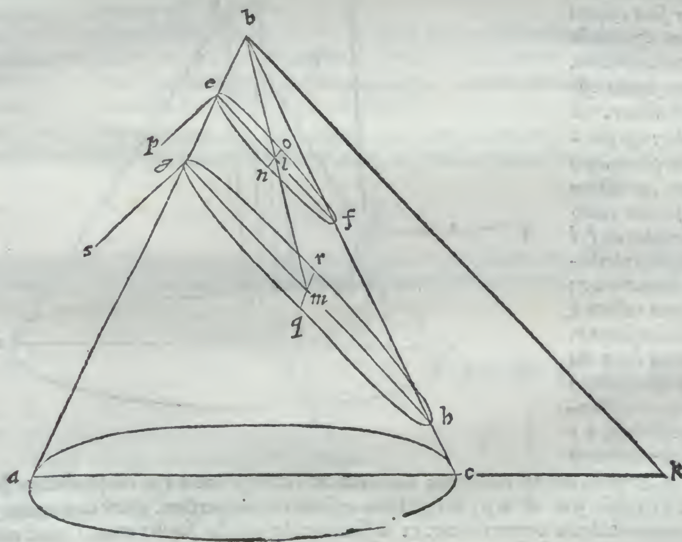

*ti, quod faciat sectionem e f. circulus igitur erit e f, centrum habens in axi, ubi punctum g: & e b f conus, cuius basis circulus circa diametrum e f, & axis b g. Dico conum e b f similem esse cono a b c. secetur enim conus a b c & altero plano per axem ducto: sitq; sectio a b c. erit a b c triangulum, & item triangulum e b f; ex tertia primi conicorum. & cum e f æquidistet basi:*

triangulum b e f simile erit triangulo b a c: triangulumq; b e g simile ipsi b a d. quare ut b d ad b a, ita b g ad b e: ut autem b a ad a c, ita b e ad e f: & ex æquali, ut b d ad a c, ita b g a e f. conus igitur e b f, cuius basis est circulus circa diametrum e f, & axis b g, similis est cono a b c, cuius basis circulus circa diametrum a c, & axis b d, ex diffinitione similium conorum. Sed si secetur conus scalenus plano subcontrarie posito ipsi basi: secetur autem & altero plano per axem ducto: erit angulus b f e æqualis angulo b a c: & triangulum f b e simile triangulo a b c. diuidatur ipsa e f linea bifariam in g, & iungantur b g. erit ut b a ad a d, sic b f ad f g. quare & triangulum b f g simile erit triangulo b a d. conus igitur f b e similis est cono a b c, ex diffinitione conorum scalenorum similium tradita à Campano in duodecimo elementorum, propositione decima; quos ipse pyramides inclinatas appellat. sunt nanque anguli ad g æquales angulis ad ipsum d: quod monstrare uolebamus. Diff. 20. undecimi. 6. sexti.

Si uero conus plano secetur coeunti cum omnibus ipsius lateribus, non autem æquidistanti basi, aut ei subcontrario posito: sectio erit ellipsis, ut monstrauit idem Apollonius in decima tertia eiusdem. Oportet tamen communem sectionem secantis plani, & eius, in quo est coni basis, esse lineam rectam, ad rectos existentem angulos, uel basi trianguli per axem, uel ei, quæ in eadem ipsi recta linea constituitur. Figuram autem coni sectione dicta contentam ad uerticem usque coni, Archimedes ἀπότμαμα κώνου uocat, nos coni portionem uertimus. Coni portio.

Quòd si conus duobus planis æquidistantibus eo pacto secetur: sectiones erunt ellipses inter se similes. sunt autem ellipses similes, quarum diametri coniunctæ eandem habent proportionem. Ellipses similes.

Sit conus a b c: & secetur duobus planis æquidistantibus, ut dictum est, quæ faciant ellipses e f, g h. Dico eas similes esse. secetur enim conus & plano per axem ducto: sitq; sectio triangulum a b c: communes autem sectiones planorum æquidistantium, & eius quod per axem ductum est,

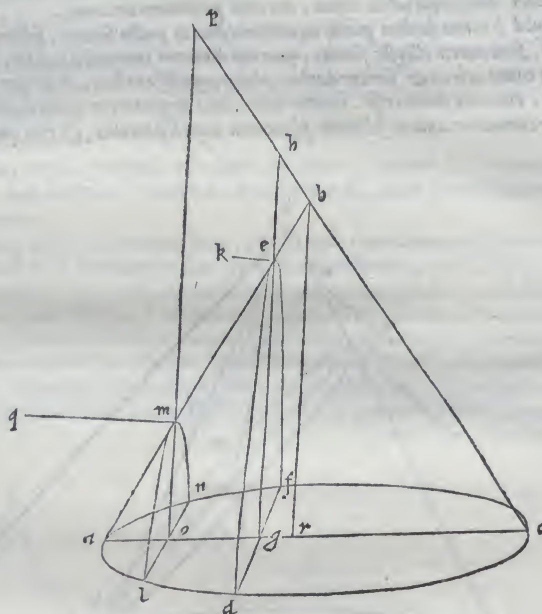



sint rectæ lineæ e f, g h. erunt hæ maiores diametri ellipsium, atque inter se æquidistantes. ducatur à puncto b linea b k, æquidistans ipsis e f, g h lineis, quæ cum linea c a producta coeat in k: & sit ellipsis e f centrum l; secunda diameter n l o; & rectum figuræ latus p e: quod græci ὀρθίαν, ἢ ὀρθίαν πλευρὰν dicunt: ellipsis autem g h centrum sit m; secunda diameter q m r; & rectum latus s g. erit iam p e ad e f; hoc est rectum latus ad transuersum, ut rectangulum a k c ad quadratum b k, ex decima tertia primi conicorum Apollonij: & ita s g ad g h. quare p e ad e f erit, 16. undec.

ut s g

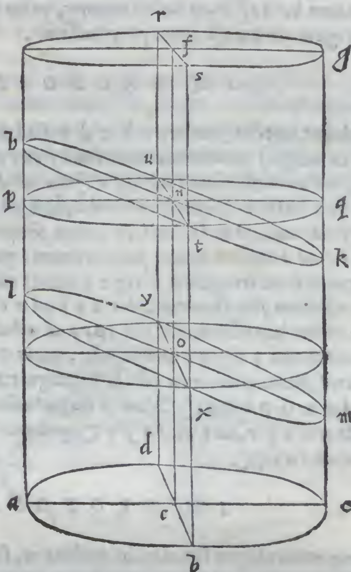
*ut s g ad g h. ut autem p e ad e f, ex uigesima prima eiusdem, ita quadratum n l ad rectangulum e l f; hoc est ad quadratum e l. & eadem ratione ut s g ad g h, ita quadratum q m ad quadratum g m. quadratum igitur n l ad quadratum e l est, ut quadratum q m ad quadratum g m. Itaque cum quadrata semidiametrorum ipsarum e f, g h ellipsium eandem inter se proportionem*
22. sexti. *habeant: & semidiametri ipsæ: & item diametri eandem habebunt: & erunt ellipses similes: quod*
15. quinti. *erat ostendendum. Ex quo patet coni portiones e b f, g b h similes quoque inter se esse. dicuntur*
Coni, & Cylindri portiones similes. *autem similes coni portiones, quemadmodum & portiones cylindri similes, quæ bases similes habent; & earum axes angulos æquales continent cum diametris basium consimilibus; proportionemq; ad eas habent eandem. ducta enim b m, qui est axis coni portionis g b h, transibit per l, quod ex similitudine triangulorum eorum facile ostendi potest: cumq; e f, g h rectæ lineæ æquidi-*
29. primi. *stent: & ipsæ n o, q r æquidistabunt; & erunt anguli ad l constituti æquales ijs, qui sunt ad m:*
18. primi. *& ut b m ad g h, ita b l ad e f. ut autem g h ad q r, ita e f ad n o. quare ex æquali & b l ad n o erit, ut b m ad q r. ex diffinitione igitur coni portio e b f similis est portioni g b h, ut dicebamus.*

*Si denique conus secetur duobus æquidistantibus planis, quæ secent basim coni per rectam, ad rectos angulos existentem ipsi basi trianguli per axem: fient & eo pacto sectiones similes. nam uel diametri sectionum æquidistabunt uni ex lateribus trianguli per axem, uel non æquidistabunt. siquidem æquidistabunt: erunt sectiones parabolæ ex undecima primi conicorum, quæ omnes inter se similes sunt. sin minus: erunt hyperbolæ ex duodecima eiusdem. eas autem similes esse ita monstrabitur. Sit conus a b c: & secetur duobus planis æquidistantibus, ut dictum est; quæ faciant sectiones hyperbolas d e f, l m n: & sit hyperboles d e f diameter e g; latus figuræ rectum k e; & transuersum e h. ipsius autem l m n diameter sit m o; rectum latus q m; transuersum m p: ductaq; b r æquidistanti diametris*




*earum e g, & m o, erit ex duodecima iam dicta, ut rectangulum a r c ad quadratum b r, sic k e ad e h: & sic q m ad m p; hoc est latus rectum ad transuersum. quare cum earum figuræ latera eandem habeant proportionem: ex diffinitione hyperbolæ similes erunt: quod monstrare oportebat.*

K Et si cylindrus duobus planis æquidistantibus secetur, quæ cum omnibus ipsius lateribus coeant.] *Sectiones cylindri, circuli quidem erunt centra habentes in axi, cum plana illa ipsum secantia æquidistent basi, aut ei subcontrarie ducantur: ellipses autem, cum aliter quomodocunque habeant, si modo communis sectio secantium planorum, & eius, in quo est basis cylindri linea recta sit, ad rectos angulos existens, aut basi parallelogrammi per axem, aut ei, quæ est in eadem recta linea: quod monstratum est à Sereno in cylindricis. Itaque ellipses illæ æquales erunt, & similes; quoniam æquales habebuut utrasque diametros, ut ostendetur. Sit enim cylindrus*



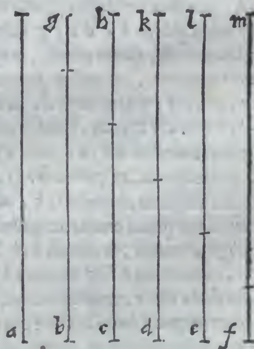

*drus a g, cuius baſis circulus a b c d; axis e f: & ſecetur duobus planis æquidiſtantibus, ut dictum eſt: ſecetur præterea & altero plano per axem ducto: ſitq́; ſectio a g. erit a g parallelogrammum, quod monſtrauit eodem in loco Serenus: planorum autem ſectiones ſint h k, l m ellipſes; quarum maiores diametri rectæ lineæ h k, l m; & centra in axi cylindri; hoc eſt in punctis n o. nam ducto plano p q per n, æquidiſtanti baſi, ſectio circulus erit, & linea p n, æqualis lineæ n q. cumq́; triangulum h n p ſimile ſit triangulo k n q, quod manifeſte patet: erit ut p n ad n h, ſic q n ad n k: & permutando, ut p n ad n q, ſic h n ad n k. ſunt autem p n, n q æquales. æquales igitur ipſæ h n, n k. quare ellipſis h k centrum eſt n. eodem modo monſtrabimus, & ellipſis l m centrum eſſe ipſum o. & cum plana æquidiſtent: æquidiſtabunt & ipſæ h k, l m: atque erit ipſum h m parallelogrammum. unde æqualis erit l m ipſi h k. ſecetur rurſus cylindrus plano per axem ducto, & erecto ſuper aliud planum ſecans item per axem: ſitq́; ſectio b d r s, quæ & ipſa parallelogrammum erit; communes autem ſectiones huius, & planorum æquidiſtantium ſint t u, x y. erunt eadem ratione t u, x y rectæ lineæ, æquidiſtantes inter ſe ſe; & idcirco parallelogrammum quoque erit t y: & linea x y æqualis ipſi t u. ſed t u diuidit per medium lineam h k; & angulos cum ea rectos efficit; quoniam & planum ſuper planum eſt erectum. Quare ſecunda diameter eſt ellipſis h k: & ſimiliter x y ſecunda diameter ellipſis l m. ſuntq́; diametri ellipſis h k, æquales diametris ellipſis l m. ellipſes igitur inter ſeſe ſunt æquales, & ſimiles: quod oſtendere uolebamus.*

16.undec.
34.primi.

## COROLLARIVM.

Ex his ſequitur, Ellipſium omnium, quæ à planis cylindrum eo pacto ſecantibus fiunt, ſecundas diametros æquales eſſe diametro baſis ipſius cylindri: ſunt enim t u, x y æquales ipſi b d: & ita in reliquis.

## IN PROPOSITIONEM I.




Huius uero demonſtratio manifeſta eſt.]

*Sint magnitudines æqualiter ſe ſe excedentes a b c d e f: ſitq́; exceſſus minimæ illarum æqualis, uidelicet ipſi f: adijciatur autem ad ipſam b magnitudo g, æqualis ipſi f: & ad c adijciatur magnitudo h, æqualis e: & ad d magnitudo k, æqualis ſibi ipſi: & ad e magnitudo l, æqualis c: & ad f magnitudo m, æqualis b. Erunt hæ ſic factæ magnitudines inter ſe ſe æquales: & item æquales maximæ: magnitudines uero b g, c h, d k, e l, f m duplæ magnitudinum b c d e f. quare addita utrobique magnitudine a, erunt magnitudines a, b g, c h, d k, e l, f m magnitudinum a b c d e f minores, quàm duplæ; deficiunt enim à duplis tanta magnitudine, quanta eſt a: magnitu-*

*dinum uero b c d e f erunt eædem maiores, quàm duplæ; quod superant eadem illa magnitudine a. constat igitur uerum esse, quod proponebatur.*

## IN PROPOSITIONEM II.

A Habent autem omnes a b c d e f ad a eandem proportionem, quam omnes g h i k l m ad g.] *Erit enim conuertendo f ad e, sicut m ad l: & componendo f e ad e, sicut m l*
22.quinti. *ad l. sed e ad d est, sicut l ad k. f e igitur ad d sunt, sicut m l ad k: & rursus componendo f e d ad d, sicut m l k ad k: est autem d ad c, ut k ad i. quare f e d ad c, ut m l k, ad i: rursusq; componendo f e d c ad c, ut m l k i ad i. & eadem semper ratione utentes, tandem concludemus, omnes a b c d e f ad a eandem habere proportionem, quam habent omnes g h i k l m ad g.*

B Verum n ad omnes n x o p r s habet eandem, quam t ad omnes t u y q z 9.] *Quo modo ostensum fuit superius a b c d e f ad a eandem habere proportionem, quam g h i k l m ad g: & hoc loco ostendemus n x o p r s ad n habere eam, quam t u y q z 9 ad t. quare & conuertendo n ad n x o p r s eam habebit, quam t ad t u y q z 9.*

C Manifestum præterea est; & si magnitudinum a b c d e f, ipsæ a b c d e referantur ad n x o p r &c.] *Nam si magnitudines s 9 auferamus, ea, qua diximus ratione: erit n ad ipsas n x o p r, ut t ad t u y q z. quare ex æquali a b c d e f ad n x o p r ita erit, ut g h i k l m ad t u y q z.*

## IN PROPOSITIONEM III.

A Sunt enim aliqua spacia, in quibus a, se se æqualiter excedentia; & excessus minimo est æqualis.] *Quoniam enim spatia, in quibus sunt b c d e f g, omnia sunt quadrata: sicut lineæ b c d e f g sese æqualiter superant: ita & reliqua quadratorum latera sese æqualiter superabunt. Quam uero proportionem habent quadratorum latera, quæ sunt bases spatiorum a, eandem*
1.sexti. *habent & ipsa spatia. quare spatia, in quibus a sese æqualiter excedunt: & excessus est æqualis minimo.*

B Et idcirco spatia omnia, in quibus i, omnibus, in quibus a, minora erunt.] *Nam cum ex prima huius, spatia omnia, in quibus h i, æqualia maximo; spatiorum, in quibus a, sese æqualiter excedentium, minora sint, quàm dupla; reliquorum uero dempto maximo, maiora. erunt & spatia omnia, in quibus i, quæ sunt dimidia spatiorum omnium, in quibus h i, minora spatijs omnibus, in quibus a: reliquis uero dempto maximo, maiora; positum est enim lineam i dimidium esse ipsius h i.*

C Quadrata igitur linearum omnium æqualium maxime &c.] *Quadrata linearum omnium æqualium maximæ, hoc est spatia, in quibus k l, quadratorum omnium linearum se se æqualiter excedentium; hoc est spatiorum, in quibus b c d e f g, minora sunt, quàm tripla: reliquorum uero dempto maximo, maiora, ex corollario decimæ de lineis spiralibus. spatia igitur omnia,*
1. sexti. *in quibus k, quæ sunt tertia pars spatiorum omnium, in quibus k l; cum linea k ipsius k l lineæ sub tripla sit: erunt spatijs b c d e f g minora; spatijs autem c d e f g maiora: atque erunt, ut superius monstratum est, spatia omnia, in quibus i minora omnibus, in quibus a; maiora autem reliquis dempto maximo. ex quibus sequitur spatia omnia, in quibus i k esse minora spatijs a b, a c, a d, a e, a f, a g; spatijs uero a c, a d, a e, a f, a g, maiora.*

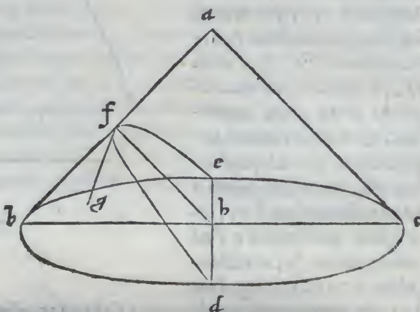
D Manifestum est igitur, spatia omnia, in quibus h i k l &c.] *Cum spatia omnia, in quibus i k, spatijs omnibus a b, a c, a d, a e, a f, a g, sint minora; reliquis uero dempto a b, maiora:*
8.quinti. *habebunt spatia omnia, in quibus h i k l ad spatia omnia a b, a c, a d, a e, a f, a g minorem propor*
1. sexti. *tionem, quàm ad spatia, in quibus i k; ad spacia autē a c, a d, a e, a f, a g, maiorem. Sed quam proportionem habent spatia omnia, in quibus h i k l ad spatia, in quibus i k, eam habet linea h l ad lineam*
13.quinti. *i k. spacia igitur omnia, in quibus h i k l ad omnia a b, a c, a d, a e, a f, a g minorem habent proportionem, quàm linea h l ad lineam i k; ad ipsa uero spatia a c, a d, a e, a f, a g, maiorem habent, quàm dictæ lineæ, proportionem.*

E Si quancunque coni sectionem rectæ lineæ contingant &c.] *Ostendit hoc Apollonius Pergæus in tertio conicorum, propositione decima septima.*

IN

## IN PROPOSITIONEM IIII.

Et sumatur ea, iuxta quam possunt, quæ à sectione ducuntur; dupla illius, quæ est usque ad axem.] *In parabola enim, quæ fit ex cono rectangulo, de qua Archimedes loquitur, linea, iuxta quam possunt, quæ à sectione ducuntur, ordinatim scilicet ad diametrum (græcis ὀρθία) dupla est eius lineæ, quæ habetur à uertice sectionis usque ad coni angulum, hoc est usque ad axem. Sit enim conus rectangulus a b c, cuius uertex a; basis autem circulus circa diametrum b c: & secetur plano per axem, quod faciat sectionem triangulū a b c: secetur autem & altero plano secante basim coni per rectam d e, ad rectos angulos existentem ipsi b c basi trianguli per axem; quod faciat sectionem in superficie coni d f e: & diameter sectionis f h æquidistans sit alteri lateri trianguli; hoc est ipsi a c: deinde à puncto f ducatur f g linea ad rectos angulos ipsi f h: ita ut g f ad f a eam habeat proportionem, quam quadratum b c ad rectangulum b a c. erit sectio d f e parabole; quod ex undecima primi conicorum Apollonij colligitur; & ipsa g f linea, iuxta quam possunt, quæ à sectione ducuntur, dupla lineæ f a. quadratum enim b c duplum est rectanguli b a c; cum angulus ad a sit rectus, ex penultima primi elementorum.* A

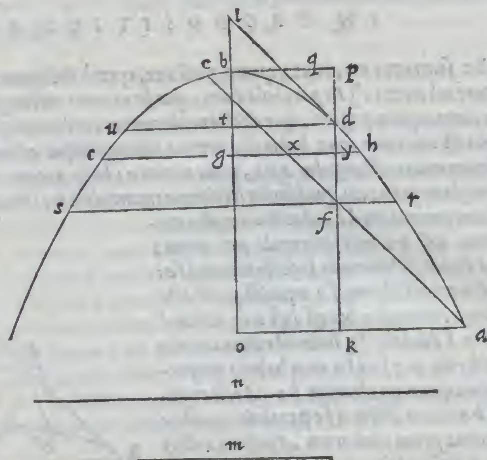



Quoniam igitur d f diameter est portionis: & a e bifariam secatur in f; & d f æquidistans est diametro sectionis coni rectanguli &c.] *Primum horum patet ex diffinitione diametri: secundum uero tum ex quadragesima sexta primi conicorum Apollonij, tum ex corollario quinquagesimæ primæ eiusdem.* B

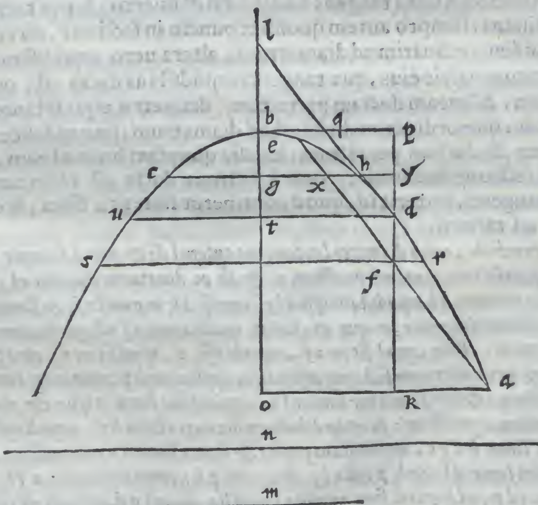
Ostensum nanque est hoc in conicis.] *Nullibi hoc ostensum est, quòd sciam in conicorum quatuor libris, qui extant ab Apollonio conscriptis. is enim aliam uiam ingressus est, ad illud idem inuestigandum; quod in primo libro apparet, propositione quadragesima nona. Sed tamen nos ex conicis id ipsum demonstrare conabimur. erit autem theorema eiusmodi.* C

Si parabolen linea tangens coeat cum diametro: & per tactum ducatur diametro æquidistans: sumpto autem quolibet puncto in sectione, ab eo ducantur duæ lineæ: una quidem ordinatim ad diametrum; altera uero æquidistans tangenti; & fiat, ut quadratum partis eius, quæ tangenti æquidistans ducta est; quæ scilicet est inter sectionem, & lineam ductam per tactum, diametro æquidistantem, ad quadratum partis illius, quæ ordinatim ducta est ad diametrum; quæ uidelicet interiicitur inter sectionem, & ductam per tactum; ita alia quæpiam linea ad eam, iuxta quam possunt, quæ à sectione ducuntur: quæ à sectione ducta est ad lineam per tactum, æquidistans tangenti, poterit id, quod continetur inuenta linea, & ea, quæ ab ipsa abscinditur ad tactum.

*Sit parabole, cuius diameter l o: tangens autem l d: & per d ducatur d k æquidistans ipsi l o: sumaturq; in sectione quod uis punctum a: & ab eo ducatur ordinatim ad diametrum linea a k o: & item alia ducatur a e æquidistans ipsi d l; secansq; d k in puncto f: & sumpta ea iuxta, quam possunt quæ à sectione ducuntur, in qua m, fiat ut quadratum a f ad quadratum a k, ita linea quæpiam n ad lineam m. Dico, quod fit ex a f, æquale esse ei, quod fit ex n, & d f. producatur enim linea k f d: & per b uerticem sectionis ordinatim applicetur b p; quæ coeat cum linea k d in puncto p, secetq; d l in q: & per f ducatur linea r f s, æquidistans lineæ p q b: & ab ipso d item ducatur linea d t u, eidem æquidistans: sumpta deinde ex diametro linea b g, æquali ipsi d f, per g similiter ducatur alia linea h x g c, æquidistans p q b; & secans lineam a e in puncto x. Itaque quoniam linea a e æquidistat lineæ d l; & k p ipsi o l; & a o ipsi p b: erunt triangula a f k, q d p, q l b æquiangula; quorum q d p, q l b etiam sunt æqualia: nam b t; hoc est p d, æqualis est ipsi l b; ex 35 primi conicorum. ut autem p d ad p q, ita l b ad b q: & permutando ut p d ad l b, ita p q, ad q b. quare cum illæ*

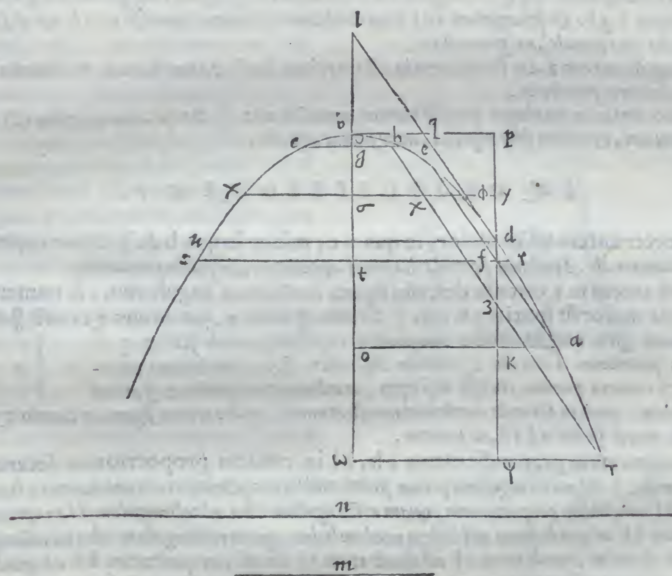



ſint æquales: & hæ p q, q b æquales erunt; & ſimiliter l q, q d. præterea ut a f ad a k, ita q d ad q p: & ob id, ut quadratum a f ad quadratum a k, ita quadratum q d ad quadratum q p; hoc eſt ad quadratum q b. ſed ut quadratum q d ad quadratum q b, ita rectangulum a f e ad rectangulum r f s; per præmiſſam; hoc eſt quadratũ a f ad rectangulum r f s. ſunt enim a f, f e æquales; ex quadrageſima ſexta primi conicorum. & eadem ratione ut quadratum q d ad quadratum q b, ita rectangulum a x e ad rectangulum h x c. erit igitur quadratum a f ad rectangulum r f s, ut rectangulum a x e ad rectangulum h x c: & permutando quadratum a f ad rectangulum a x e, ut rectangulum r f s ad rectangulum h x c: & per conuerſionem rationis quadratum a f ad exceſſum, quo quadratum a f excedit rectangulum a x e; hoc eſt ad quadratum f x, ex quinta ſecundi, ut rectangulum r f s ad exceſſum, quo rectangulum r f s excedit rectangulum h x c: & permutando quadratum a f ad rectangulum r f s, ut quadratum f x ad exceſſum, quo rectangulum r f s excedit rectangulum h x c. erat autem quadratum a f ad rectãgulũ r f s, ut quadratum d q ad quadratũ q b. quare quadratum f x ad exceſſum, quo rectangulũ r f s excedit rectangulum h x c erit, ut quadratum d q ad quadratum q b: & rurſus permutando quadratum f x ad quadratum d q, ut exceſſus, quo rectangulum r f s excedit rectangulũ h x c ad quadratum q b. ſed quadratum f x eſt æquale quadrato d q: nam linea f x eſt æqualis lineæ d q, ut apparebit. exceſſus igitur, quo rectangulum r f s excedit ipſum h x c, eſt æqualis quadrato q b. Lineam autem f x æqualem eſſe lineæ d q, ſic oſtendetur. Sit enim y punctum, in quo linea k p ſecat lineam h c. quoniam igitur b g; hoc eſt p y facta eſt æqualis ipſi d f: ſi quidem y cadit intra ſectionem, ſublata ab utraque communi linea d y; uel utrique addita, ſi extra cadit, ut in ſecunda figura, erit y f linea æqualis p d. & quo



niam linea a e æquidiſtat lineæ d l; & h c ipſi p b: erunt triangula f y x, d p q æquiangula: & ut y f ad p d, ita f x ad d q, & y x ad p q. æqualis eſt igitur f x ipſi q d; & y x ipſi p q. eſt autem y g æqualis ipſi p b. quare & reliqua g x eſt æqualis reliquæ b q; & quadratum g x æquale quadrato b q. ergo exceſſus, quo rectangulum r f s excedi rectangulum h x c, eſt æqualis quadrato g x: & propterea rectangulum h x c unà cum quadrato g x eſt æquale rectangulo r f s. ſed cum rectangu- 5. ſecundi
lum h x c unà cum quadrato g x æquale ſit quadrato c g: erit rectangulum r f s æquale quadrato c g. Itaque ut quadratum d q ad quadratum q b, hoc eſt ut quadratum a f ad quadratum a k, ita quadratum a f ad quadratum c g. erat autem ut quadratum a f ad quadratū a k, ita linea n ad lineam m. quadratum igitur a f ad quadratum c g erit, ut linea n ad lineam m: & accepta cōmuni altitudine f d, erit quadratum a f ad quadratum c g, ut rectangulum ex n & f d ad rectangulum ex m & 1. ſexti.
f d: & permutando quadratum a f ad rectangulum ex n & d f, ut quadratum c g ad rectangulum ex m & b g, æquali ipſi f d. at uero quadratum c g æquale eſt ei, quod fit ex m & b g rectangulo; poſitum eſt enim lineam m eſſe, iuxta quam poſſunt quæ à ſectione ducuntur: quadratum igitur a f eſt æquale ei, quod fit ex n & d f: quod fuerat oſtendendum: & ita ſectionis a d e, cuius diameter d f, erit linea n, iuxta quam poſſunt, quæ à ſectione ducuntur.

Atque ad hunc quidem modum propoſitum concludemus, ubi linea a e ſecat lineam h c. Quòd ſi non ſecet, ut in poſtrema figura: aſſumemus ex diametris d k, b o duas lineas æquales; ex diametro quidem d k, lineam d ζ, ex diametro autem b o, ipſam b σ: ita ut ducta per ζ, æquidiſtans ipſi




d l; hoc eſt τ ζ υ ſecet φ χ ductam per σ, æquidiſtantem ipſi p q b. & item ordinatim applicata ad diametrum linea τ ψ ω, quam habet proportionem quadratum τ ζ ad quadratum τ ψ, eandem habeat linea n ad m. non aliter, quàm ſuperius, oſtendemus, quadratum τ ζ æquale eſſe ei, quod fit ex n & ζ d rectangulo, hoc eſt, ſectionis τ d υ, cuius eſt diameter d ζ, lineam n eſſe eam, iuxta quam poſſunt, quæ à ſectione ducuntur. quod cum ita ſit: & quadratum a f lineæ ordinatim ad diametrum ductæ, æquale erit ei, quod fit ex n & f d. At propter ſimilitudinem triangulorum a k f, τ ψ ζ, linea a f erit ad lineam a k, ut τ ζ ad τ ψ. quare & ut quadratum a f ad quadratum a k, ita linea n ad lineam m: & illud eſt, quod oſtendiſſe oportebat.

Ex

Ex iam dictis perspicuum est, si in parabola à sectione ducatur linea æquidistans diametro: & à quolibet eiusdem sectionis puncto lineà ordinatim ad diametrum applicetur: ducatur quoque alia linea ipsi æquidistans, diuidensq; sectionem; ita ut à linea æquidistanti diametro æqualē abscindat ei: quæ à diametro ab alia abscissa est ad uerticem sectionis: esse rectangulum partibus huius contentum, quæ uidelicet fiunt à linea diametro æquidistanti, æquale quadrato lineæ ad diametrum ordinatim applicatæ, hoc est rectangulum r f s æquale esse quadrato c g: quod demonstratum est superius: & eodem modo in aliis demonstrabitur.

D Et potest h g æquale ei, quod continetur linea m & b g.] *Ex undecima primi conicorum Apollonij. est enim linea m, iuxta quam possunt quæ à sectione ordinatim ad diametrum ducuntur, ut etiam superius dictum est.*

E Quare & quadratum a f ad quadratum h g eandem habet proportionem, quam n ad m; quòd d f, b g positæ sint æquales. *Nam cum quadratum a f æquale sit rectagulo ex n & d f: & quadratum h g æquale rectangulo ex m & b g: erit, ut quadratum a f ad quadratum h g, sic rectangulum ex n & d f ad rectangulum ex m & b g: ut autem rectangulum ex n & d f ad rectangulum ex m & b g, æquali ipsi d f, sic n ad m; cum rectangula habeant eandem altitudinem. quadratum igitur a f ad quadratum h g proportionem habet eandem, quam n ad m.*

F Aequales igitur erunt h g, a k.] *Sequitur ex iam dictis, & undecima quinti, quadrata h g; a k esse æqualia. quare & eorum latera æqualia sint necesse est.*

G Ergo triangulum h b g triangulo d a f est æquale.] *Quod triangulum h b g dimidium sit rectanguli h g b: & triangulum d a f item dimidium rectanguli, quod fit ex a k; & d f: uel potius dimidio eius æquale, ex prima sexti.*

H Trianguli autem a d e sesquitertia est portio a d e.] *Id monstrauit Archimedes in libello de quadratura paraboles.*

I Portio abscissa utrique prædictarum æqualis erit.] *Ex ijs, quæ proxime dicta sunt. quæ autem uni, & eidem sunt æqualia, inter se sunt æqualia.*

## IN PROPOSITIONEM V.

A Diameter autem ipsius maior, in qua a c; minor in qua b d.] *Minor eiusmodi sectionis diameter ab Apollonio secunda diameter appellatur, in primo conicorum.*

B Potest autem in z circulo describi figura multorum angulorum, & numero parium, quæ maior sit spatio a b c d.] *Sit enim spatium n, quo circulus z excedit spatium a b c d. duabus igitur magnitudinibus inæqualibus expositis, circulo scilicet z & n spatio, poterimus à circulo z tantum abscindere figura multorum angulorum, & numero parium, in ipso descripta, ut relinquatur quoddam spatium ipso n minus: quod in secunda duodecimi monstratum est. quare erit ea figura in circulo z descripta adhuc maior spatio a b c d, ut ponitur.*

n

C Quoniam enim perpendiculares e h, k l in eandem proportionem secantur ad puncta m b.] *Nam ex uigesima prima primi conicorum, & in circulo quadratum e h ad quadratum k l eam habet proportionem, quam rectangulum c h a ad rectangulum c l a: & in ellipsi, quadratum b h ad quadratum m l itidem eandem habet, quam rectangulum c h a ad rectangulum c l a. unde sequitur, quadratum e h ad quadratum k l ita esse, ut quadratum b h ad quadratum m l: & permutando quadratum e h ad quadratum b h, ut quadratum k l ad quadratum m l.*
22. sexti. *quare & linea e h ad lineam b h erit, ut linea k l ad lineam m l: quod Archimedes ponebat ex conicis.*

D Constat trapezium l e ad ipsum h m eandem habere proportionem, quam h e ad b h.] *Iisdem enim sic stantibus, producantur h l, b m lineæ usque quo conueniant in puncto o: producatur item e k; quæ & ipsa unà conueniet cum illis in eodemmet puncto, ut monstrabimus. nam nisi ita fiat: erit punctum, in quo conueniunt h l, e k, uel infra ipsum o, uel supra. Sit primum infra, si esse possit, ubi est p: iunganturq; e o: & producatur l k, ut secet lineam e o in q. erunt triangula o h b, o l m inter se æquiangula: & item æquiangula inter se ipsa o h e, o l*
4. sexti. *q: lateraq; habebunt proportionalia. quare ut o l ad o h, ita l m ad h b: & rursus ut o l ad o h,*
11. quinti. *ita l q ad h e. ergo l m ad h b est, ut l q ad h e: & permutando l m ad l q, ut h b ad h e. sed erat*

*erat l m ad l k, ut h b ad h e: monstratum enim iam est, e h, k l in eandem proportionem secari secundum b m. ex quo sequitur l q æqualem esse ipsi l k; totum parti: quod fieri non potest. non igitur e k producta conuenit cum h l infra ipsum o. Sed conueniat supra in r, si possit. Rursus ad eundem modum ratiocinantibus, idem sequetur absurdum. ergo conueniet & e k in puncto o. Quo quidem confirmato, habebit triangulum o h e ad triangulum o h b eam proportionem, quam h e habet ad h b: & eadem ratione triangulum o l k ad triangulum o l m eam, quam l k ad l m; hoc est quam h e ad h b. reliquum igitur spatium l e ad reliquum h m habebit eandem, quam h e ad h b: quod ostendisse oportuit.*

9.quinti.

1. sexti.

19.quinti.

E

Rursus in coni acutianguli sectione potest describi figura multorum angulorum, & numero parium, quæ maior sit circulo z.] *Sit sectio coni acutianguli, seu ellipsis a b c d; cuius diameter maior sit a c, minor uero b d: in eaq; describatur figura quadrilatera, ductis lineis a b, b c, c d, d a. Iam constat figuram hanc maiorem esse, quàm sit dimidium ipsius spatij sectione a b c d contenti: quoniam si per puncta a b c d duxerimus lineas sectionem tangentes; fiet alia figura quadrilatera circumscripta, quæ erit dupla ipsius inscriptæ; ex quadragesima prima primi Euclidis. nam dimidium circumscriptæ figuræ b a d duplum est dimidij inscriptæ; uidelicet trianguli a b d, cum basim eandem habeant, & eandem altitudinem: & similiter b c d duplum trianguli c b d. ipsa autem figura quadrilatera circumscripta minus est spatium sectione coni acutianguli contentum. quare inscripta figura maior est, quàm ipsius dimidium. secentur deinde bifariam rectæ lineæ a b, b c, c d, d a in punctis c f g h: & à centro sectionis, quod sit k ad e ducta linea producatur usque ad sectionem in puncto l: & per l alia ducatur tangens sectionem m l n. manifestum est ex conuersa quadragesimæ septimæ primi conicorum Apollonij, uel ex sexta secundi, lineam m l n tangentem sectionem æquidistare ipsi a b. quare ductis lineis a l, l b, erit a l b triangulum ipsius parallelogrammi a n dimidium, & ob id maius quàm dimidium eius, quæ circa ipsum est, portionis ellipsis. Idem quoque fiat in alijs portionibus. demonstrabitur unumquodque aliorum triangulorum b o c, c r d, d u a maius esse, quàm dimidium portionis ipsum*

ambientis. Rursus secentur bifariam rectæ lineæ al, lb, bo, oc, cr, rd, du, ua: & à centro k per ea puncta ductis lineis usque ad sectionem; ductisq; alijs sectionum tangentibus, fiant alia parallelogramma, atque triangula. monstrabimus eodem modo unumquodque triangulum maius, quàm dimidium suæ portionis: hocq; semper fiat, quousque relinquantur quædam sectionis portiones, quæ omnes minores sint eo excessu, quo spatium sectione coni acutianguli contentum excedit circulum z. id enim fieri posse ex prima decimi Euclidis docuimus. figura igitur eo pacto descripta maior erit circulo z: quod facere uolebamus.

## IN PROPOSITIONEM VI.

*A* Spatium ergo q ad circulum, cuius diameter a c &c.] *Spatium enim q ad circulum, cuius diameter est a c, habet eam proportionem, quam b d ad a c, ex antecedenti. Quam autem habet b d ad a c eandem rectangulum ex b d, a c habet ad quadratum a c; ex lemmate uigesimæ secundæ decimi.*

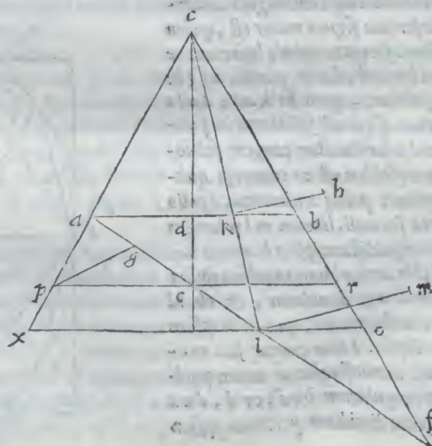
*B* Constat igitur spatium q ad z circulum habere eam, quam &c.] *Per æquam scilicet rationem ex uigesima secunda quinti.*

## IN PROPOSITIONEM VII.

*A* Ex hoc apparet spatia similibus acutianguli coni sectionibus contenta &c.] *Apparet, inquit ex ijs, quæ dicta sunt, spatia similibus acutianguli coni sectionibus contenta eam inter se proportionem habere, quam quadrata diametrorum, quæ sint eiusdem rationis. Sint enim similium acutianguli coni sectionum spatia, in quibus a b. habebit spatium a ad spatium b eam proportionem, quam habet quadratum maioris diametri sectionis, in qua a; quæ sit c g ad quadratum maioris diametri sectionis, in qua b; hoc est e h: & item habebit eam, quam quadratum minoris diametri g d ad quadratum h f. Quoniam cum sectiones similes sint, erit ut c g ad g d, sic e h ad h f. sed ut c g ad g d, sic rectangulum c g d; hoc est c d ad quadratum g d, ex lemmate uigesimæ secundæ decimi: & ut e h ad h f, sic rectangulum e h f; hoc est e f ad quadratum h f. Vt igitur rectangulum c d ad quadratum g d, sic rectangulum e f ad quadratum h f: & permutando, ut rectangulum c d ad rectangulum e f, sic quadratum g d ad quadratum h f. monstratum est autem spatium a ad spatium b habere eam proportionem, quam rectangulum c d ad rectangulum e f. ergo spatium a ad spatium b eam habebtt, quam quadratum g d ad quadratum h f: & eodem modo ostendetur eam habere proportionem, quam quadratum c g habet ad quadratum e h. quare patet propositum.*

## IN PROPOSITIONEM VIII.

*A* Quod quidem fieri potest; quoniam proportio maior est ea, quam habet rectangulum a d b ad quadratum d c.] *In quodcunque enim punctum ceciderit f infra ipsum b: semper maior erit proportio rectanguli a e f ad quadratum e c, quàm rectanguli a d b ad quadratum d c. nam per e ducta p e r linea, æquidistanti ipsi a d b, quam proportionem habet rectangulum a d b ad quadratum d c, eam habet rectangulum p e r ad quadratum e c; quòd similia sint ea*



*triangula, & latera proportionalia habeant. Sed cum rectangulum a e f maius sit rectangulo p e r, ut inferius ostendemus: sequitur ex octaua quinti maiorem esse proportionem rectanguli a e f ad quadratum e c, quàm rectanguli p e r ad idem quadratum e c; hoc est, quàm rectanguli a d b ad quadratum d c. Reliquum est, ut ostendamus, rectangulum a e f maius esse ipso p e r. id autem fiet hoc pacto. Quoniam enim angulus e r p maior est angulo c f a: & angulo c r p æqualis est angulus c p r: fieri potest, ut ab angulo c p r auferamus angulum æqualem ipsi c f a. auferatur; & sit r p g. est igitur ut f e ad e r, sic p e ad e g, ob similitudinem triangulorum e f r, e p g: & propterea rectangulum f e g æquale est rectangulo p e r. sed rectangulum f e a maius est ipso f e g. quare & maius erit rectangulo p e r: quod ostendisse oportuit.* 16. primi. 5. primi. 16. sexti.

Et quadratum e c ad rectangulum p e r eam habet, quam quadratum d c ad rectangulum a d b.] *Propter triangulorum eorum similitudinem.* B

Est autem ut rectangulum a e f ad rectangulum p e r, ita rectangulum a l f ad ipsum x l o.] *Proportio nanque rectanguli a e f ad rectangulum p e r, ex uigesima tertia sexti componitur ex proportione, quam habet a e ad p e, & ex ea, quam habet e f ad e r: & eodem modo proportio rectanguli a l f ad rectangulum x l o componitur ex proportione a l ad l x, & l f ad l o. sed proportio a e ad p e est eadem proportioni a l ad l x, ob similitudinem triangulorum a e p, a l x: & proportio item e f ad e r est eadem ei, quam habet l f ad l o: simile est enim triangulum f e r triangulo f l o. cum igitur proportiones eædem sint, ex quibus rectangulorum eorum proportiones componuntur: erit rectangulum a e f ad rectangulum p e r, sicut a l f rectangulum, ad rectangulum x l o.* C

Et ut quadratum dimidiæ maioris diametri ad rectangulum a d b, ita quadratum h k ad rectangulum a k b.] *Monstrauit hoc Apollonius primo conicorum, propositione uigesima prima.* D

Sed rectangulum x l o ad quadratum c l habet eam, quam rectangulum a k b ad quadratum k c.] *Ob triangulorum similitudinem.* E

Sed linea c m est in superficie coni. constat igitur, & h punctum in coni esse superficie.] *Cui hoc non probatur, is legat primam propositionem primi conicorum Apollonij.* F

## IN PROPOSITIONEM IX.

Vel ellipsis.] *Hoc est coni acutianguli sectio: fuit enim hæc primum sic appellata, ut superius adnotauimus.* A

Sumatur conus uerticem habens c punctum, in cuius superficie sit circulus, uel acutianguli coni sectio circa diametrum e b.] *Si quidem circulus circa diametrum e b descriptus fuerit: iam inuentus erit conus uerticem habens punctum c, in cuius superficie sit data acutianguli coni sectio. Si uero non circulum, sed ellipsim circa diametrum e b contigerit describi: quoniam ab eius centro recta linea super planum, in quo ipsa est, erecta ad ipsum c pertingit: poterimus ex ijs, quæ proxime monstrata sunt, conum inuenire uerticem habentem c punctum, in cuius superficie acutianguli coni sectio circa e b descripta deprehendatur.* B

Est igitur ut quadratum n ad rectangulum f d g, ita quadratum l m ad rectangulum e l b.] *Vt enim quadratum n ad rectangulum f d g, ita quadratum alterius diametri, siue circuli, siue ellipsis ad quadratum e b: quod antea posuimus. ut autem quadratum alterius diametri ad quadratum e b, ita quadratum semidiametri ad quadratum dimidiæ e b: & ut quadratum semidiametri ad quadratum dimidiæ e b, ita quadratum l m ad rectangulum e l b; quod monstrauit Apollonius in primo conicorum, propositione uigesima prima. ut igitur quadratum n ad rectangulum f n g, ita quadratum l m ad rectangulum e l b.* C 15. quinti. 11. quinti.

Vt autem rectangulum f d g ad rectangulum a d b, ita rectangulum e l b ad ipsum p l r.] *Proportio enim rectanguli f d g ad rectangulum a d b, composita est ex proportione, quàm habet f d ad a d, & ex ea, quam habet d g ad d b: & ita prrportio rectanguli e l b ad rectangulum p l r composita est ex proportione e l ad p l, & l b ad l r. sed ut f d ad a d, ita e l ad p l, ob similitudinem triangulorum a f d, p e l. ut autem d g ad d b, ita l b ad l r; propterea quòd simile est triangulum g d b triangulo b l r. quare eisdem existentibus pro-* D 23. sexti.

*portionibus, quæ rectangulorum proportiones componunt, erit ut rectangulum f d g ad ipsum a d b, ita e l b ad p l r.*

E Sed ut quadratum n ad rectangulum a d b, ita quadratum h k ad rectangulum a k b.] *Constat id ex eadem uigesima prima primi conicorum Apollonij.*

F Habet autem & rectangulum p l r ad quadratum c l eandem proportionem, quam rectangulum a k b ad quadratum k c.] *Est enim ex quarta sexti ob similitudinem triangulorum, ut p l ad c l, ita a k ad k c: & ut l r ad c l, ita k b ad k c.*

## IN PROPOSITIONEM X.

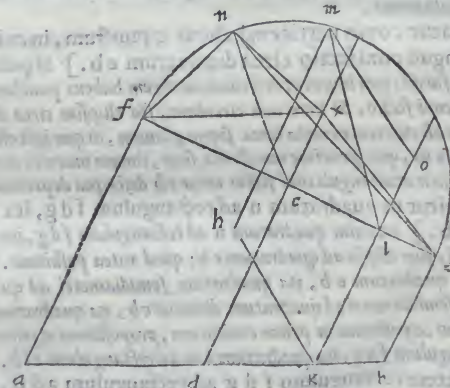
A Eandem ergo proportionem habet quadratum lineæ perpendicularis h k ad rectãgulum a k b, & quadratum f c ad rectangulum a d b: quoniam æqualis est f g alteri diametro.] *Sequitur hoc ex uigesima prima primi conicorum Apollonij: est enim f c æqualis semidiametro datæ sectionis. nam productis lineis f g, a b quousque conueniant: fiet triangulum, cuius basis f a; & lineæ basi æquidistantes c d, g b: eritq; ut a b ad f g, ita a d ad f c. & cum f g sit æqualis alteri diametro, ut positum est: erit & f c æqualis semidiametro.*

B Habet autem & rectangulum f l g ad rectangulum a k b proportionem eam, quam f c quadratum ad quadratum a d ellipsis.] *Proportiones enim laterum, ex quibus rectangulorum ipsorum proportiones componuntur eædem sunt: nanque est ut f c ad a d, ita f l ad a k; & l g ad k b.*

C Quare rectangulum f l g æquale est quadrato h k.] *Nam ostensum est, ut quadratum f c ad rectangulum a d b; hoc est ad quadratum a d, ita quadratum h k ad rectangulum a k b: & ita rectangulum f l g ad rectangulum a k b. quare ex nona quinti sequitur rectangulum f l g æquale esse quadrato h k.*

D Est igitur linea c n æqualis ipsi c f.] *Positum iam est, quadratum c f excedere quadratum dimidij alterius diametri, quadrato c x. sed cum angulus ad x rectus sit: erit quadratum c n æquale quadrato x n, quod est dimidium alterius diametri, & quadrato c x: & propterea linea c n æqualis erit lineæ c f.* (pen. primi)

E Ergo ut quadratum m o ad quadratum m l, ita est quadratum x n ad quadratum n c.] *Sunt enim triangula m l o, n c x æquiangula, ut monstrabitur: idcircoq; latera habent proportionalia. nam ductis lineis g x, f x, g n, f n, quoniam trianguli f x c duo latera f c, c x æqualia sunt duobus lateribus g c, c x trianguli g c x; & angulus ad c rectus in utroque: erit linea f x æqualis lineæ g x: & rursus trianguli f n x duo latera f x, x n æqualia sunt duobus lateribus g x, x n ipsius g x n trianguli; & anguli ad x recti. lineæ igitur g n, f n eadem ratione sunt æquales. quare & triangulum f n c æquale est, & simile triangulo g n c: & angulus f c n æqualis angulo g c n. linea ergo c n perpendicularis est ad ipsam f g. sed & l m ducta est perpendicularis ad eandem. æquidistantes igitur sunt l m, c n. At uero & æquidistantes sunt ipsæ k o, d x. quare angulus o l m æqualis est angulo x c n: & angulus ad o rectus æqualis angulo recto ad x. reliquus igitur angulus, reliquo angulo æqualis, & triangulum m l o triangulo n c x æquiangulum, quod monstrare uolebamus.* (4. primi; 28. primi; 10. undec.)




Vt

Vt autem quadratum ml ad rectangulum akb, ita cn quadratum ad ipsum ad.] *Erit igitur ut quadratum ml ad rectangulum flg, ita quadratum cn ad quadratum cf. ut autem rectangulum flg ad rectangulum akb, ita quadratum cf ad quadratum ad. nam rursus productis lineis fg, ab usque adeo, ut conueniant; fiet triangulum; cuius basis erit fa, & basi æquidistantes lineæ cd, lk, gb: & ob id, ut fl ad ak, ita lg ad kb, & fc ad ad. Quare ex æquali sicut quadratum ml ad rectangulum akb, sic quadratum cn ad quadratum ad.* F

Perspicuum est igitur perpendiculares mo, hk æquales esse.] *Concluditur ex nona quinti, quadratum mo esse æquale quadrato hk. quare & latus lateri æquale erit.* G

## IN PROPOSITIONEM XI.

Omnis coni ad conum proportionem compositam esse ex proportione basium, & proportione altitudinum &c.] *Qui sint, qui hoc monstrarint, nondum comperi, nisi fortasse innuat Euclidem; ex ijs enim, quæ ipse tradit in duodecimo elementorum libro, illud facile elicitur. Et quanquam uerissimum sit in omnibus non solum conis, sed & cylindris ipsis: potissimum tamen de ijs dicitur, qui super inæquales bases, & inæquali altitudine constituuntur. nam qui bases quidem habent inæquales, altitudinem uero eandem, proportionem habent, quam eorum bases, ut monstrauit Euclides libro duodecimo propositione undecima. at qui bases æquales, altitudinem uero inæqualem nacti sunt, proportionem habent eandem, quam eorum altitudines: id, quod ipse idem monstrauit propositione decima quarta eiusdem libri. Itaque nos non hæc solum, sed & alia quàm plurima demonstrabimus, ab his non abhorrentia. postquam nonnulla, quæ ad eorum demonstrationem faciunt, præmiserimus.* A

## PROPOSITIO I.

Omnem præterea cylindri portionem triplam esse portionis coni, quæ basim habeat ipsi eandem, & æqualem altitudinem &c.] *Cum cylindri, & coni portiones eandem basim, & æqualem altitudinem habuerint: erit cylindri portio portionis coni tripla; quod monstrabimus (ut ipse inquit) eodem prorsus modo, quo in decima propositione duodecimi Euclidis monstratur, omnem conum cylindri tertiam partem esse, qui eandem basim, & æqualem altitudinem habeat. figuram uero describemus in ellipsi, hoc est in ipsa basi, quemadmodum supra docuimus in sextam huius scribentes.* B

## PROPOSITIO II.

Coni & cylindri portiones, quæ eandem habent altitudinem, adinuicem sunt, sicuti bases.

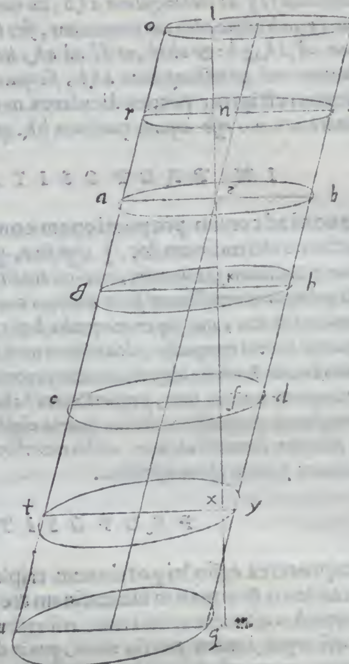
*Et hoc facile demonstrabitur, quo modo in undecima duodecimi eiusdem Euclidis demonstratum est, sub eadem altitudine existentes conos, ac cylindros adinuicem esse, sicuti bases.*

## PROPOSITIO III.

Si cylindri portio plano secetur æquidistanti eis, quæ ex opposito planis: erit portio ad portionem, sicuti altitudo ad altitudinem.

*Cylindri portio ad plano secetur gh, æquidistanti eis, quæ ex opposito planis, uidelicet ipsis ab, cd: à puncto autem e, termino axis portionis demittatur linea ef, perpendicularis super planum, in quo est cd: & occurrat plano gh in puncto k. Dico sic esse portionem bg ad portionem gd, ut altitudo ek ad altitudinem kf. producatur enim linea ef utraque ex parte in lm puncta: & ponantur ipsi ek lineæ æquales quotcunque libuerit en, nl: ipsi autem kf ponantur æquales quotcunque fx, xm: & ducantur per puncta lm plana æquidistantia ipsis ab, cd: & ad ea usque producatur cylindri portio oq. præterea per puncta nx ducantur plana æquidistantia iisdem, quæ portionem ipsam secent. manifestum est ex ijs, quæ superius monstrata sunt, his planis portionem cylindri secantibus, sectiones fieri coni acutianguli sectiones, seu ellipses, æquales, & similes. Quare spatia his sectionibus contenta æqualia erunt. Itaque intelligantur portio-*

*nes cylindri p r, r b, d t, t q, quarum bases sint spatia coni acutianguli sectionibus r s, a b, t y, q u contenta. & quoniam ipsæ l n, n e, e k, altitudines sunt æquales: portiones p r, r b, b g ad inuicem sunt, sicuti bases, ex antecedenti. bases autem sunt æquales: & ipsæ igitur portiones æquales erunt. Et eodem modo, quoniam ipsæ m x, x f, f k, sunt æquales: & bases æquales: portiones q t, t d, d g inter se sunt æquales. Demonstrabitur tandem, quemadmodum in tertia decima duodecimi Euclidis portionem b g ad portionem g d esse, sicut altitudo e k ad k f altitudinem: quod monstrare uolebamus.*




Monstrabitur quoque simili ratione idem omnino contingere in cylindro scaleno, ut si plano secetur æquidistanti eis, quæ ex opposito planis, sit cylindrus ad cylindrum, sicut altitudo ad altitudinem.

*Eorum etenim cylindrorum bases circuli sunt, ut monstrauit Serenus in cylindricis, atque æquales circuli; quòd æquales habeant diametros. faciet autem ad eius demonstrationem undecima duodecimi Euclidis, quam etiam ad conos, & cylindros scalenos referri nihil est, quod prohibeat, quemadmodum, & decimam eiusdem.*

Manifestum etiam est, si cylindrus quilibet, seu cylindri portio plano secetur æquidistanti eis, quæ ex opposito planis, esse cylindrum ad cylindrum, seu portionem ad portionem, sicut axis unius ad axem alterius.

*De recto enim cylindro patet ex demonstratis ab Euclide, de scaleno autem, & cylindri portione patere potest ex iam dictis, nam ut altitudo ad altitudinem, ita axis ad axem ex secunda sexti elementorum, uel ex decima septima undecimi.*

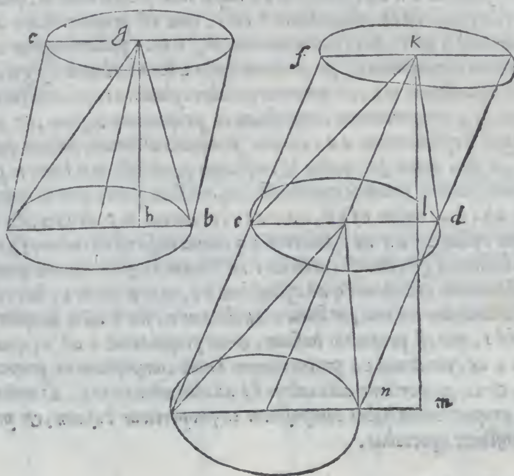
## PROPOSITIO IIII.

Quæ inæqualibus basibus existunt cylindri, & coni portiones, adinuicem sunt, sicuti altitudines.

*Sint inæqualibus basibus a b, c d cylindri portiones e b, f d: & à punctis g k, quæ sunt termini axium demittantur lineæ perpendiculares g h, k l ad plana, in quibus sunt bases a b, c d. Dico portionem cylindri e b ad portionem f d esse, sicut altitudo g h ad altitudinem k l. producatur enim k l usque ad m; ita ut sit l m æqualis ipsi g h: & per m ducatur planum m n, æquidistans c d plano: & usque eò intelligatur producta portio f d, quæ sit f n. Quoniam igitur e b, c n cylindri portiones eandem habent altitudinem: adinuicem sunt sicuti bases. bases autem sunt æquales. ergo & cylindri portiones e b, c n inter se sunt æquales. Præterea cum cylindri portio f n plano quodam secetur c d, æquidistanti eis, quæ ex opposito planis: cylindri portio c n ad portionem f d est, sicut altitudo m l ad altitudinem l k, æqualis autem monstrata est portio c n ipsi portioni e b. portio igitur e b ad portionem f d est, sicut m l; hoc est g h altitudo ad altitudinem k l, sed*

*ſicut cylindri portio ad cylindri portionem, ſic portio coni ad coni portionem; nam cylindri portio tripla eſt portionis coni, ut dictum eſt. quare & coni portio a b g ad coni portionem c d k eſt, ſicut g h altitudo ad altitudinem k l: quod fuerat monſtrãdum.*

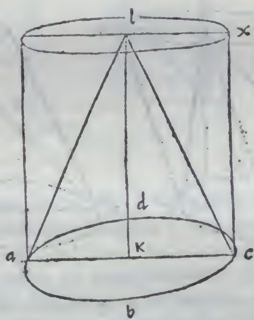
Hoc idem facile cõcludetur de cylindris, ac conis ſcalenis ex decima, & undecima duodecim Euclidis unà cum antecedenti.

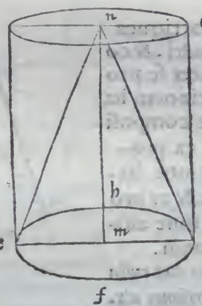



## PROPOSITIO V.

Cylindri omnes, & coni inter ſe proportionem habẽt compoſitam ex proportione baſium, & ex proportione altitudinum.

*Sint duo cylindri ſiue recti, ſiue ſcaleni a x, e o; a x quidem, cuius baſis ſit circulus a b c d, altitudo k l; e o autem, cuius baſis circulus e f g h; & altitudo m n. Dico cylindrum a x ad cylindrum e o proportionem habere compoſitam ex proportione baſis a b c d ad baſim e f g h, & ex proportione altitudinis k l ad altitudinem m n. Vel igitur hi cylindri habebunt æqualem altitudinẽ, uel non æqualem. habeant primo æqualem: & ſit ut baſis a b c d ad baſim e f g h, ita linea r ad lineam s. ut autem k l ad m n, ita s ad lineam t. Iam ex undecima duodecimi cylindrus a x ad cylindrum e o habet eam proportionẽ, quam baſis a b c d ad baſim e f g h; hoc eſt, quam linea r ad lineam s. & cũ ſit æqualis k l ipſi m n: erit & s æqualis ipſi t.*




r

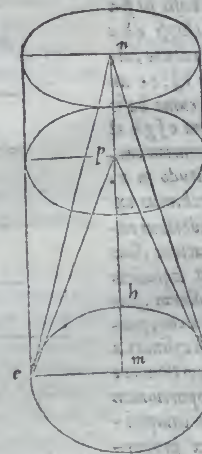
s

t

r

s

u



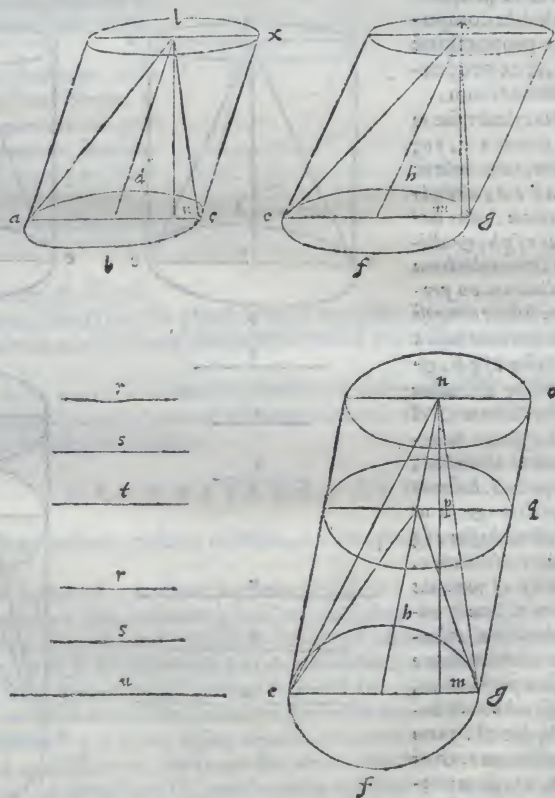
*quare cylindrus a x ad cylindrum e o habet eam proportionem, quam r ad t. proportio autem r ad t composita est ex proportione r ad s, quæ est proportio basis a b c d ad basim e f g h: & ex proportionē s ad t, quæ est altitudinum l k, n m. Cylindrus igitur a x ad cylindrum e o habet proportionem compositam ex proportione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis k l ad altitudinem m n. & quoniam quilibet cylindrus triplus est sui coni: habebit & a l c conus ad conum e n g proportionem compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.*

*Quòd si cylindrorum a x, e o non sit æqualis altitudo; habeat cylindrus e o maiorem altitudinem, ut m n maior sit, quàm k l: reseceturq; ab ipsa m n linea m p, æqualis ipsi k l: & per p ducatur planum scindens cylindrum, æquidistansq; eis, quæ ex opposito planis: & sit rursus, ut basis a b c d ad basim e f g h, ita r ad s: ut autem m p ad m n, ita s ad u. erit ex undecima duodecimi cylindrus a x ad cylindrum e q, cuius basis est circulus e f g h, altitudo m p, ut basis a b c d ad basim e f g h; hoc est, ut linea r ad lineam s: & ex decima quarta duodecimi, & ijs, quæ nos*
22.quinti. *monstrauimus cylindrus e q ad cylindrum e o, ut m p ad m n; hoc est ut s ad u. quare cylindrus a x ad cylindrum e o erit, ut linea r ad lineam u. sed r ad u proportio composita est ex proportione r ad s, quæ est proportio basium, & ex proportione s ad u, quæ est altitudinum. cylindrus igitur a x ad cylindrum e o proportionem habet compositam ex proportione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis k l ad altitudinem m n. Et eodem modo conus a l c ad conum e n g proportionem habet compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum: quod demonstrare oportebat.*

## PROP. VI.

Portiones cylindri, & coni inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, & ex proportione altitudinum.

*Sint duæ cylindri portiones a x, e o: a x quidem, cuius basis sit spatium ellipsi a b c d contentum, altitudo k l: e o autem, cuius basis spatium e f g h ellipsi contentum, & altitudo m n. Môstrabimus ex antecedêtibus eadem ratione, siue habeat æqualem altitudinem, siue inæqualem; portionem cylindri a x ad portionem e o proportionem habere compositam ex propor-*

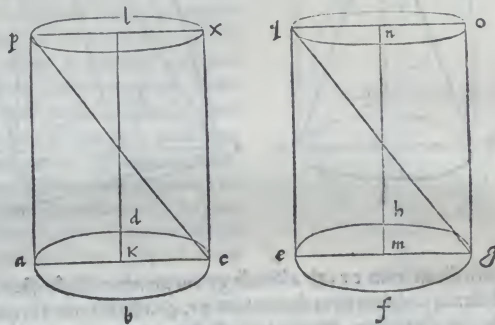


tione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis k l ad altitudinem m n. & cum cylindri portio tripla sit portionis coni: habebit & coni portio a l c ad portionem coni e n g proportionem compositam ex proportione basium earum a b c d, e f g h, & ex proportione altitudinum k l, m n: quod fuerat nobis propositum.

## PROPOSITIO VII.

Cylindrus omnis, plano per diametrum parallelogrammi, quod ex eius sectione per axem fit, ducto bifariam secatur.

*Sit cylindrus a x, cuius basis circulus a b c d; axis k l: & secetur plano, ut dictum est: secetur autem & altero plano per axem ducto, & erecto super planum secans, quod faciat sectionem parallelogrammum a c x p: & plani per diametrum parallelogrammi secantis, sit recta linea c p. Dico cylindrum plano per c p ducto bifariam secari. Sit alter cylindrus huic similis, & æqualis e o, cuius basis circulus e f g h; axis m n: & secetur itidem duobus planis, ut in altero factum est: sitq; sectio per axem parallelogrammum e g o q: & g q recta linea plani per diametrum secantis. Erit iam parallelogrammum e g o q æquale, & simile parallelogrammo a c x p: et diameter g q diametro c p æqualis. quare & ellipsis facta plano per diametrum g q, æqualis, & similis erit ellipsis factæ plano per diametrum c p ducto; nam earum maior diameter est eadem diametro parallelogrammi; minor uero æqualis diametro basis, quod in principio huius monstratũ est. Itaque congruet parallelogrammum parallelogrammo, posita m n super k l; & g q super c p. congruet autem & planum secundum g q plano secundum c p constituto; quoniam & ellipsis ellipsi. congruet igitur & pars secta à cylindro e o, in qua est n, parti sectæ ab alio cylindro, in qua l: atque altera alteri: & partium superficies superficiebus similiter. Rursus posita n m super k l, ut sit n super k, & m super l; congruent & parallelogramma, & cadet q super c; & g super p: & planum secundum q g plano secundum c p congruet: & pars secta à cylindro, in qua m, parti sectæ ab alio cylindro, in qua l: & item pars in qua n, parti in qua k. Quoniam igitur pars eadem utrique congruit parti: manifestum est partes æquales inter se esse. quare cylindrus plano per c p ducto bifariam secatur. quod ostendere oportebat.*

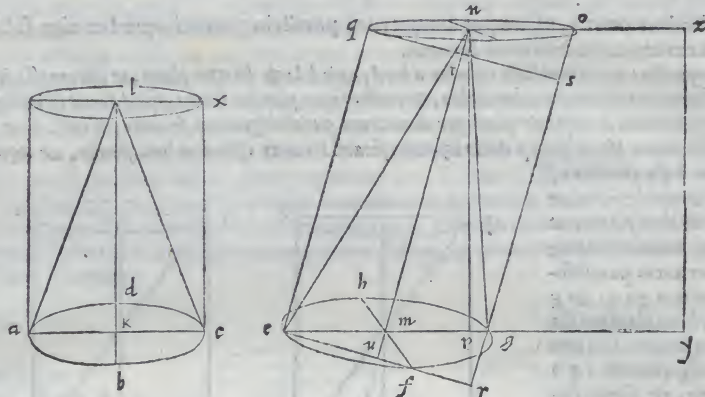



## PROPOSITIO VIII.

Cylindri omnes, & cylindrorum portiones, & item coni, & conorum portiones inter se, proportionem habent compositam ex proportione basium, & ex proportione altitudinum.

*Sit cylindrus siue rectus, siue scalenus a x, cuius basis sit circulus a b c d; altitudo l k: & cylindri portio e o, basim habens spatium ellipsi e f g h, contentum; axem uero n m; & altitudinem n p. Dico cylindrum a x ad cylindri portionem e o proportionem habere compositam ex proportione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis l k ad altitudinem n p. secetur cylindri portio plano per axem ducto: & sit sectio e g o q, quam esse parallelogrammum facile monstrari potest; quomodo à Sereno monstratum est, cuiuslibet cylindri, plano per axem ducto, sectionem esse parallelogrammum: & à puncto e ducatur linea e r, ad rectos angulos ipsi e q: & similiter à q alia ducatur ad rectos angulos eidem, quæ sit q s secans axem in t. Intelligaturq; cylindri portio, producta ex parte e f g h usque ad lineam e r, quam n m secet in u: & per e r ducatur*

tur. planum secans erectum super planum per axem: deinde per lineam q s ducatur aliud planum secans, quod plano per lineam e r ducto æquidistet. Erit r q cylindrus, basim habens circulum circa diametrum e r, & axem t u, æqualis cylindri portioni e o: nam pars e r g, addita cylindri portioni, æqualis est parti q s o, demptæ ab eadem. est enim e r g dimidia cylindri, cuius basis est cir




culus circa diametrum e r, & altitudo g r, ut proxime est ostensum: & q s o item dimidia cylindri, basim habentis circulum circa diametrum q s, & altitudinem o s: qui cylindri cum æquales habeant & bases, & altitudines, æquales inter se sunt. quare & eorum dimidiæ partes, æquales. Eorum autem altitudines, lineas scilicet g r, o s æquales esse patet; nanque est r s æqualis ipsi o g, cum utraque sit æqualis eidem q e. dempta ergo communi linea s g, relinquentur ipsæ q r, o s æquales. producatur quoque linea e g usque ad y: ita ut sit g y media proportionalis inter g e, e r.
17. sexti. Itaque cum tres lineæ e g, g y, e r proportionales sint; rectangulum g e r æquale est quadrato g y: & est e g diameter ellipsis e f g h: & e r æqualis secundæ diametro eiusdem. rectangulum igitur ex diametris ellipsis e f g h est æquale quadrato g y: & propterea spatium ipsa ellipsi contentum æ-
29. primi. quale est circulo circa diametrum g y; ex septima huius. Et quoniam angulus e g r æqualis est angulo n m p: & anguli e r g, n p m utrique recti: erit & reliquus angulus reliquo angulo æqualis: & triangulum e r g triangulo n p m simile. quare e r ad e g est, ut n p ad n m; hoc est ad t u; ei
4. sexti. æqualem. Et rursus cum tres lineæ proportionales sint e r, g y, e g: erit, ut e r ad e g, ita quadra
corol. 20. sexti. tum e r ad quadratum g y; hoc est circulus circa diametrum e r ad circulum circa diametrum g y. Intelligatur cylindrus g z, cuius basis sit circulus circa diametrum g y, & altitudo n p. quorum
2. duodec. autem cylindrorum bases ex altera parte respondent altitudinibus, ij inter se sunt æquales; ex decima quinta duodecimi. æqualis est igitur cylindrus g z cylindro r q. sed cylindrus r q est æqualis portioni cylindri e o, ut monstrauimus. quare & g z cylindrus eidem portioni e o est æqualis. & proportio cylindri a x ad cylindrum g z est eadem proportioni eiusdem ad cylindri portionem e o. sed proportio cylindri a x ad cylindrum g z, composita est ex proportione circuli a b c d ad circulum circa diametrum g y, & ex proportione l k ad n p. ergo & proportio eiusdem cylindri a x ad cy-
7. quinti. lindri portionem e o composita est ex eisdem proportionibus. proportio autem circuli a b c d ad circulum circa diametrum g y est eadem proportioni eiusdem circuli a b c d ad spatiũ ellipsi e f g h contentum; quod quidem ipsi circulo circa g y diametrum est æquale. proportio igitur cylindri a x ad cylindri portionem e o composita est ex proportione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis l k ad altitudinem n p. At uero triplus est cylindrus a x, coni a l c: & portio cylindri e o item tripla portionis coni e n g. ergo & coni a l c ad coni portionem e n g proportio composita est ex proportione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis l k ad altitudinem n p: quod proposuimus demonstrandum.

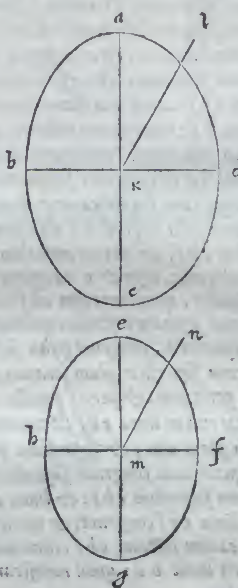
Ex

Ex his colligitur, cylindros omnes, & eorum portiones, & item conos, & eorum portiones, ſub eadem quidem altitudine exiſtentes, eam inter ſe proportionem habere, quam ipſæ baſes; ſuper æqualibus autem baſibus exiſtentes, eam habere, quam altitudines.

## PROPOSITIO IX.

Similes coni, & cylindri porriones in tripla ſunt proportione diametrorum conſimilium, quæ in baſibus.

*Coni, & cylindri portiones ſimiles, quæ ſint, dictum eſt ſuperius. Sint autem hæ, quarum baſes quidem a b c d, e f g h ſpatia ellipſibus contenta: diametri uero baſium maiores a c, e g; minores b d, f h; & axes k l m n. Dico coni portionem, cuius baſis a b c d, uertex l ad coni portionem, cuius baſi e f g h, & uertex n, triplam habere proportionem eius, quam habet diameter a c ad diametrum e g; uel quam b d ad ipſam f h. nam niſi ita ſit: habebit coni portio a b c d l eam proportionem ad ſolidum quoddam minus ipſa coni portione e f g h n, aut ad maius. ſed ſimili ratione qua utitur Euclides in duodecimo, ubi monſtrat ſimiles conos, & cylindros in tripla proportione eſſe diametrorum, quæ in baſibus, & hoc loco monſtrabimus coni portionẽ a b c d l neque ad ſolidum minus ipſa coni portione e f g h n, neque ad maius, eam proportionem habere. Quare ad ipſam e f g h n triplam proportionem habebit eius, quæ eſt a c ad e g, aut b d ad f h. ut autem coni portio ad coni portionem, ita & cylindri portio ad cylindri portionem. Cylindri igitur portio, cuius baſis a b c d, & uertex l ad cylindri portionem, cuius baſis e f g h, uertex n, triplam habet proportionem diametri a c ad diametrum e g, uel b d ad f h: quod fuerat propoſitum.*




## PROPOSITIO X.

Aequalium coni, & cylindri portionum baſes ex contraria parte reſpondent altitudinibus; & quarum coni, & cylindri portionum baſes ex contraria parte reſpondent altitudinibus, hæ inter ſe ſunt æquales.

*Hoc monſtrabimus eadem prorſus ratione, qua monſtratur in decima quinta duodecimi Euclidis, Aequalium conorum, & cylindrorum baſes ex contraria parte reſpondere altitudinibus: & quorum item baſes ex contraria parte reſpondent altitudinibus, conos, & cylindros æquales eſſe. Monſtratum ſiquidem eſt, conorum, & cylindrorum portiones ſub eadem quidem altitudine exiſtentes, eam inter ſe proportionem habere, quam ipſæ baſes, In æqualibus autem baſibus exiſtentes, eam habere, quam altitudines. ex quibus propoſitum facile concludetur.*

De conis item, ac cylindris ſcalenis uerum id eſſe monſtrabimus non alia ratione, quàm in eadem decima quinta duodecimi de rectis monſtratum eſt.

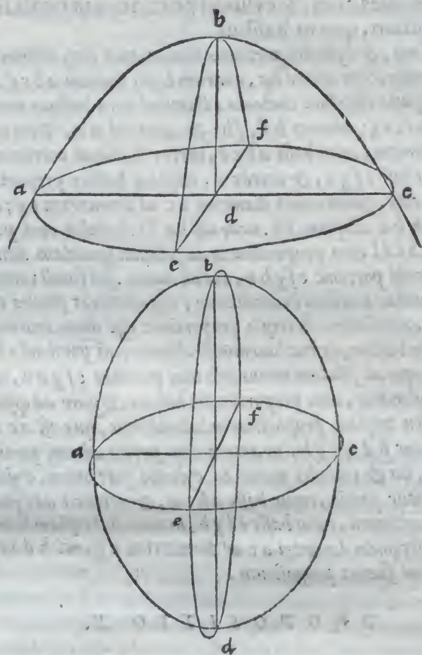
*Nanque & hi cum ſub eadem ſint altitudine proportionem habent inter ſe, quam eorum baſes: & cum in æqualibus baſibus ſtatuantur eam habent, quam altitudines.*

## IN PROPOSITIONEM XII.

Horum autem omnium manifeſtæ ſunt demonſtrationes.] *Demonſtrationes eorum, cum non adeo manifeſtæ ſint his temporibus, nos omnes afferre tentabimus, immutato tamen ordine, prout methodus ipſa poſtulare uidetur.* A

## PROPOSITIO I.

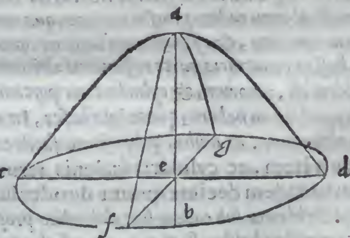
Si conoides, aut sphæroides quodlibet plano ſecetur per axem ducto: ſectio erit eadem illi, quæ figuram deſcribit: diameter autem eius erit communis ſectio planorum; eius ſcilicet, quod ſecat figuram; & eius, quod per axem ducitur erectum ſuper planum ſecans.




*Secetur conoides, aut ſphæroides quodlibet plano, ut dictum eſt: ſecetur autem & altero plano per axem, erecto ſuper planum ſecans: & ſit figuræ ſectio a b c: ſit autem ſectio e b f, quæ figuram ipſam deſcribit: ſectionis eius diameter, & axis figuræ ſit b d. Dico ſectionem a b c eſſe eandem ſectioni e b f: atque eius diametrum eſſe lineam b d; communem uidelicet planorum ſectionem. Intelligatur manente linea b d circumferri ſectionem e b f. itaque cum f applicauerit ſe ad c: congruet tota ſuperficies a b c cum ſuperficie e b f: & fiet ex ambabus ſuperficies una. ergo & e ad ipſum a ſe applicabit. quoniam enim e b f ſectio eſt, quæ figuram deſcribit: quocunque ea peruenerit, congruet ipſius ſuperficies cum ſuperficie plani ſecantis figuram per axem, & per e f puncta tranſeuntis; ita ut linea e b f ſit communis ſectio plani eius, & ſuperficiei figuræ. quare cum congruat ſuperficies a b c cum ſuperficie e b f: & linea a b c cum linea e b f congruet; & erit ſectio a b c eadem ſectioni e b f, cuius diameter erit linea b d: quod monſtrare oportebat.*

## PROPOSITIO II.

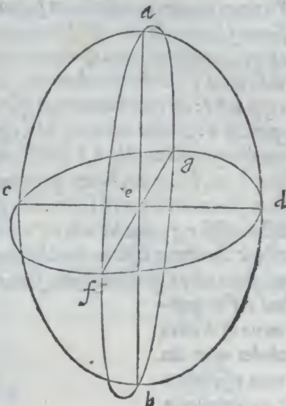
Si conoides, aut ſphæroides quodlibet plano ſecetur ſuper axem erecto: ſectio circulus erit centrum habens in axe.




*Sit conoides, aut ſphæroides quodlibet, cuius axis a b: ſecetur autem plano, ut dictum eſt; quod faciat in ſuperficie ſectionem, lineam c d. Dico c d circulum eſſe, centrum habentem in linea a b. Sit enim e punctum, in quo linea a b occurrit ſecanti plano: & per axem, & c d puncta ducatur planum ſecans figuram, & faciens ſectionem c a d. erit ſectio eadem illi, quæ figuram deſcribit, ex antecedenti; & eius diameter linea a b. & quoniam puncta c e d, ſunt in plano ſecanti ſuper axem erecto: ſunt autem & in plano*

ſecanti

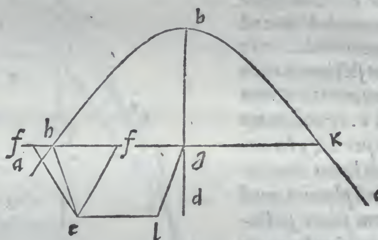
*secanti per axem: recta linea erit c e d. sumatur praete rea aliud quod uis punctum f in sectione c d: & per f & axem rursus ducatur aliud planum secans, faciensq; sectionem f a g. manifestum est f a g quoque esse eandem illi, quae figuram describit; habereq; diametrum li neam a b: & similiter lineam f e g rectam esse. Cum ergo sectiones c a d, f a g, uni, & eidem eaedem sint: & inter se eaedem erunt; quarum eadem diameter a b: & erit c e aequalis ipsi f e. sed est e d aequalis ipsi c e: & e g ipsi f e. quare omnes inter sese sunt aequales c e, f e, e d, e g: & sunt in eodem plano. circulus igitur est linea c d, centrum habens in linea a b: quod fuerat demonstrandum.* 3. undec.

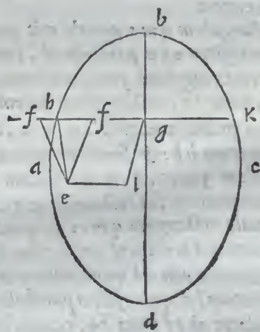



## PROPOSITIO III.

Si conoides, aut sphaeroides quodlibet sece tur plano per axem: lineae ductae à punctis, quae in superficie figurae sunt, non tamen in sectione ipsa, perpendiculares ad planum secans, intra figurae sectionem cadent.

*Sit conoides, aut sphaeroides quodlibet: & secetur plano per axem; cuius sectio sit a b c: axis figurae, & diameter sectionis sit b d. sumatur autem in superficie eius quod uis punctum e, praeterquam in ipsa sectione a b c: & ab eo ducatur linea e f perpendicularis ad planum secans. Dico e f intra sectionem cadere; alioquin, aut cadet extra, aut in sectionem ipsam. cadat primum extra, si fieri possit: & per f ducatur aliud planum secans figuram, & super axem erectum, faciet id sectionem circulum, centrum habentem in axi, ubi punctum g. communis autem sectio dictorum planorum sit recta linea f h g k: & à g attollatur g l perpendicularis ad idem planum secans per axem: atque per e ducatur e l aequidistans ipsi f k, erit & l g aequidistans ipsi e f: & idcirco e l aequalis ipsi f g. sed h g cum sit semidiameter circuli: maior est, quàm e l; quòd dupla ipsius h g maior, quàm dupla e l. quare h g maior est, quàm f g; pars, quàm totum: quod fieri non potest. non igitur cadet e f extra sectionem. Similiter quoque demonstrabimus, neque in ipsam sectionem cadere. nam si eadem omnia fiant, quae superius: sequitur e l aequalem ipse ipsi h g: quod item fieri non potest: est enim h g circuli semidiameter, & maior, quàm e l, ut dictum est. cadet igitur intra sectionem: quod fuerat propositum.*

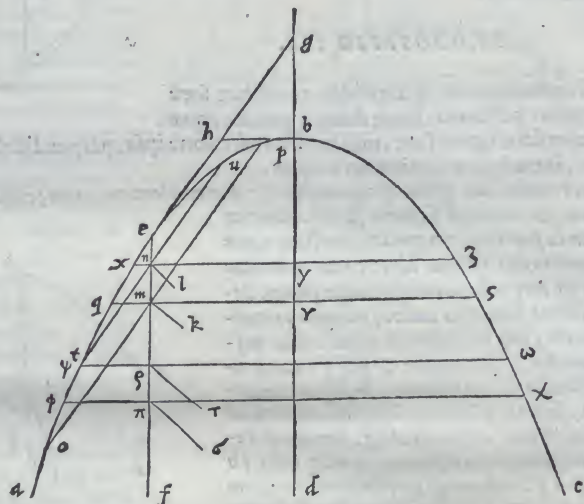



## PROPOSITIO IIII.

Si conoides parabolicum plano secetur axi aequidistanti: sectio erit parabole, eadem illi, quae figuram describit: diameter autem eius erit communis sectio planorum; eius, quod secat figuram; & eius, quod per axem ducitur erectum super planum secans.

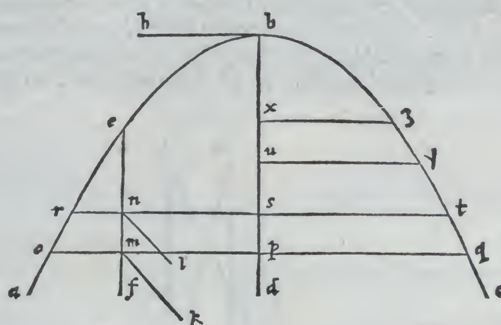
Secetur conoides parabolicum plano, ut dictum est: secetur autem & altero plano per axem, erecto super planum secans: & sit conoides sectio a b c; quæ erit parabole figuram describens, ex ijs, quæ supra monstrauimus: & eius diameter, & axis conoidis linea b d: plani uero figuram secantis sit recta linea e f. ostendendum est, sectionem conoidis, quæ fit plano circa e f, esse parabolen, eandem ipsi a b c: & eius diametrum esse lineam e f. Ducatur enim linea e g, tangens sectionem a b c in puncto e: & alia ducatur b h, tangens in puncto b, & secans lineam e g in h. intelligantur autem duo quæuis puncta k l in sectione circa e f: & ab ipsis demittantur ad lineam e f perpendiculares k m, l n. erunt hæ & perpendiculares ad planum, in quo est parabole a b c: quoniam & planum secans erectum est super idem planum. Deinde per m ducantur duæ lineæ; una quidem æquidistans ipsi e g, quæ sit o m p; altera uero q m r s, æquidistans ipsi h b: & similiter per n duæ aliæ lineæ ducantur eisdem æquidistantes, uidelicet t n u ipsi e g æquidistans, & x n y z ipsi h b. manifestum est ex quadragesima sexta primi conicorum Apollonij, lineas o p, t u bifariam secari à linea e f in punctis m n: & iccirco paraboles o e p diametrum esse ipsam e f, ex corollario quinquagesimæ primæ primi eiusdem. præterea per q s, k m rectas lineas ducatur planum. erit hoc erectum super lineam b d, quæ est axis conoidis: et faciet sectionem circulum, cuius centrum est r. & eodem modo per x z, l n rectas lineas ducatur aliud planum, quod item faciet sectionem circulum, & eius cẽtrum erit y:




& ob id rectangulum q m s æquale erit quadrato k m: & rectangulum x n z æquale quadrato l n. Quoniam igitur o e p parabole est, cuius diameter e m: ducunturq; ordinatim ad diametrum o m, t n: erit ex uigesima primi conicorum linea m e ad lineam e n, ut quadratum lineæ o m ad quadratum lineæ t n: rectangulum autem o m p, hoc est quadratum o m ad rectangulum q m s, ex ea, quam præmisit ad quartam huius, & decima septima tertij conicorum, erit, ut quadratum e h ad quadratum h b: & similiter quadratum t n ad rectangulum x n z. quare quadratum o m ad rectangulum q m s erit, ut quadratum t n ad rectangulum x n z: & permutando quadratum o m ad quadratum t n, ut rectangulum q m s ad rectangulum x n z. sed quadratum k m monstratum est æquale rectangulo q m s: & quadratum l n æquale rectangulo x n z. ergo quadratum o m ad quadratum t n erit, ut quadratum k m ad quadratum l n. erat autem linea m e ad lineam e n, ut quadratum o m ad quadratum t n. linea igitur m e ad lineam e n erit, ut quadratum k m ad quadratum l n. quare sectio parabole erit ex uigesima primi conicorum: et eius diameter linea e f. Abscindatur ab e f linea e $\pi$, æqualis lineæ b r: & linea e $\rho$, æqualis ipsi b y: et à punctis $\pi$ $\rho$ attollantur æquidistantes ipsis m k, n l usque ad sectionem circa e f, quæ sint $\pi\sigma$, $\rho\tau$: deinde per $\pi$ ducatur linea $\varphi\pi\chi$, æquidistans ipsi h b: & per $\rho$; eidem æquidistans ducatur $\psi\rho\omega$. erit quadratum $\sigma\pi$ æquale rectangulo $\varphi\pi\chi$: & quadratum $\tau\rho$ æquale ipsi $\psi\rho\omega$. rectangulum autem $\varphi\pi\chi$ æquale est quadrato q r, per ea, quæ ostendimus ad quintam huius; & rectangulum $\psi\rho\omega$ æquale quadrato x y. quadratum igitur $\sigma\pi$ est æquale quadrato q r: & quadratum $\tau\rho$ quadrato x y. quare & linea $\sigma\pi$ lineæ q r; & linea $\tau\rho$ ipsi x y est æqualis. parabole igitur circa e f, æqualis est, & eadem parabolæ a b c; hoc est ei, quæ figuram describit: quod fuerat ostendendum.

ALITER.

*ALITER. Iisdem manentibus, sumptisq; in sectione circa e f duobus quibuslibet punctis k l, et demissis perpendicularibus k m, l n ad ipsam e f, per m ducatur linea o m p q, æquidistans ipsi h b: & per n r n s t ducatur, eidem æquidistans: similiterq; & per rectas lineas k m, o q; & per ipsas l n r t ducantur plana conoides secantia. erunt ea erecta super axem b d: & facient sectiones circulos, quorum centra p s. unde rectangulum o m q æquale erit quadrato k m: & r n t rectangulum æquale quadrato l n. præterea in diametro sectionis b d sumpta linea b u, æquali ipsi e m; & sumpta b x, æquali e n; atque à punctis u x ductis æquidistantibus ipsi h b lineis u y x z, erit quadratum u y ad quadratum x z, ut linea u b ad lineam b x. sed cũ rectangulum o m q æquale sit quadrato u y, ut supra ostendimus; & rectangulum r n t æquale quadrato x z: erunt quadrata u y, k m æqualia: & item æqualia quadrata x z, l n. quare quadratum k m ad quadratum l n erit, ut linea u b ad lineam b x, hoc est ut linea m e ad lineam e n. sectio ergo circa e f parabole est, & eadem parabolæ a b c, quæ figuram describit: quod proponebatur ostendendum.* 20. primi conicorũ




## LEMMA.

Si recta linea secetur in duobus punctis: sitq; rectangulum ex partibus unius sectionis æquale rectangulo ex partibus alterius: erunt ipsæ partes inter se æquales: hoc est maior maiori, & minor minori æqualis erit.

*Sit recta linea a b, quæ secetur in duobus punctis c d; ita ut rectangulum a c b æquale sit rectangulo a d b. Dico lineam a c æqualem esse lineæ d b: & c b ipsi a d. diuidatur a b bifariam in puncto e. erit rectangulum a c b unà cum quadrato e c æquale quadrato e b; ex quinta secundi: & eadem ratione rectangulum a d b unà cum quadrato d e æquale eidem. rectangulum ergo a c b unà cum quadrato e c æquale est rectangulo a d b; & quadrato d e: & dempto ex altera parte rectangulo a c b, & ex altera a d b, ei æquali, ut positum est, relinquitur quadratum e c æquale esse quadrato d e: & lineam e c lineæ d e æqualem. quare c b æqualis est ipsi a d: & reliqua a c reliquæ d b æqualis: quod erat ostendendum.*

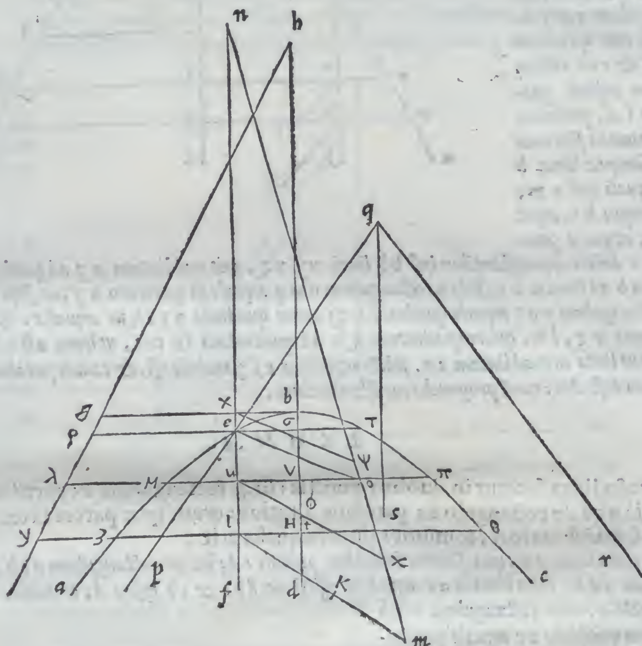



## PROPOSITIO V.

Si conoides hyperbolicum plano secetur, axi æquidistanti: sectio erit hyperbole, similis illi, quæ figuram describit: diameter autem eius erit communis sectio planorum; & eius, quod figuram secat; & eius, quod per axem ducitur, erectum super planum secans.

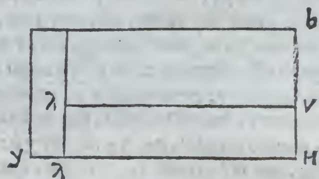
*Secetur conoides hyperbolicum plano, ut dictum est: secetur autem & altero plano per axem, erecto super planum secans: & sit conoidis sectio a b c, quæ erit hyperbole, ut superius est demonstratum:*

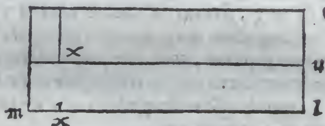
ſtratum: & eius diameter, & axis conoidis, recta b d: plani uero figuram ſecantis ſit ipſa linea e
f. Oſtendendum eſt, ſectionem conoidis factam plano circa e f, eſſe hyperbolen, ſimilem ipſi a b c:
eiusq; diametrum eſſe lineam e f. Sit hyperboles a b c rectum figuræ latus b g; & tranſuerſum b
h: & ducta linea h g producatur. Intelligatur autem in ſectione circa e f aliquod punctum k: at
que ab eo demittatur perpendicularis k l ad lineam e f, quæ et perpendicularis erit ſuper planum,
in quo a b c ſectio. Quam uero proportionem habet e l ad l k, eam habeat l k ad l k productam
16. ſexti. ad punctum m; hoc eſt ad l m. erit rectangulum m l e æquale quadrato k l. Rurſus quam pro-
portionem habet g b ad b h, habeat m l ad l n: & iungantur n m; deinde à puncto e attollatur




perpendicularis e o ſuper planum, in quo ſectio a b c uſque ad lineam n m. coibit enim cum ea in
eodem exiſtens plano, & æquidiſtabit ipſi l m: proptereaq; n e ad e o erit, ut n l ad l m; hoc eſt
6. undec. ut h b ad b g. Duabus igitur datis rectis lineis, terminatis ad rectos angulos n e, e o, inueniemus
ex quinquageſima tertia primi conicorum, in ipſa e f coni ſectionem dictam hyperbolen in eodem pla
no; ita ut e f diameter ſit ſectionis; uertex punctum e; eiusq; figuræ rectum latus ſit e o; &
tranſuerſum e n. Sit autem conus, cuius ipſa eſt ſectio p q r: & eius axis q s. erit iam coni p q r
ſectio; hoc eſt ipſa hyperbole inuenta, eadem ſectioni conoidis circa e f, factæ ab eodem plano. pun
ctum enim k, quod in ſectione conoidis ſumpſimus, in ſectione quoque coni eſſe conſtat, ex duo-
decima primi conicorum: cum ſit quadratum k l æquale rectangulo m l e. Intelligatur aliud pun
ctum t in ſectione coni; & ab ipſo perpendicularis demittatur t u ad lineam e f: producaturq;
ad ipſam n m, ut coëat cum ea in puncto x. erit quadratum t u eadem ratione æquale rectangulo
x u e. Ducatur præterea per punctum l linea y z l η θ, æquidiſtans ipſi g b, & ſecans hyperbolen
a b c in punctis z θ, diametrum in η, & lineam h g productum in y: & item per u e ducantur
aliæ lineæ, eidem æquidiſtantes; per u quidem ipſa λ μ u ν π, ſecans hyperbolen in μ π, diame-
trum in ν, & h y in λ: per e autem linea ρ e σ τ, ſecans hyperbolen in e τ, diametrum in σ, &
h y in ρ: ab ipſo demum puncto u attollatur linea perpendicularis ſuper planum, in quo a b c,
occurrens

occurrens sectioni conoidis in φ: & per lineas k l, ζ θ ducatur planum secans conoides: quod cum sit erectum super eius axem; faciet sectionem circulum. ducatur etiam per lineas φ u, μ π aliud planum secans item conoides. faciet & id sectionem circulum: atque erit quadratum k l æquale rectangulo ζ l θ: & similiter quadratum φ u æquale ipsi μ u π rectangulo. Monstrabitur linea iam dicta φ u æqualis esse ipsi u t. rectangulum enim y η b, ut in subiecta figura apparet, excedit rectangulum λ ν b, rectangulo λ ν η, & eo, quod fit ex b η & excessu, quo y η excedit λ ν, qui excessus, breuitatis caussa, dicatur y λ. quadratum autem ζ η æquale est rectangulo y η b: & quadratum μ ν æquale rectangulo λ ν b. ergo quadratum ζ η excedit quadratum μ ν, rectangulo λ ν η, & eo, quod fit ex b η & y λ. sed idem quadratum ζ η æquale est rectangulo ζ l θ; hoc est quadrato k l; hoc est rectangulo m l e, & quadrato l η: quadratum autem μ ν eadem ratione æquale est rectangulo μ u π; hoc est quadrato φ u; & quadrato u ν. rectangulum igitur m l e unà cum quadrato l η excedit quadratum φ u unà cum quadrato u ν, rectangulo λ ν η, & eo, quod fit ex b η & y λ. Itaque dempto ex altera parte quadrato l η: & ex altera quadrato u ν, ei æquali, rectangulum m l e nihilominus excedet quadratum φ u, eodem illo excessu. quare quadratum φ u, & rectangulum λ ν η unà cum eo, quod fit ex b η & y λ æqualia sunt rectangulo m l e. Rursus rectangulum m l e, ut in secunda figura, excedit rectangulum x u e, rectangulo m l u, & eo, quod fit ex e u & excessu, quo m l excedit x u; qui excessus dicatur m x: & idcirco rectangula x u e, m l u unà cum eo, quod fit ex e n & m x æqualia sunt rectangulo m l e. 2.secundi




Quadratum igitur φ u, & rectangulum λ ν η unà cum eo, quod fit ex b η & y λ sunt æqualia rectangulis x u e, m l u unà cum eo, quod fit ex e u, & m x: rectangulum autem λ ν η unà cum eo, quod fit ex b η & y λ æquale est rectangulo m l u, & ei, quod fit ex e u, & m x, ut inferius apparebit. relinquitur igitur quadratum φ u æquale esse rectangulo x u e. sed erat quadratum t u æquale eidem rectangulo. ergo quadrata φ u, t u æqualia sunt: & ob id lineæ φ u, t u æquales; immo uero una, atque eadem linea: & φ, τ unum, atque idem punctum.

Illud autem, quod diximus, facile monstrabitur, præmissis non nullis.

Et primo rectangulum ex b σ & excessu, quo y η excedit λ ν; hoc est y λ, æquale esse rectangulo ex ν η & excessu, quo ρ σ excedit g b. dicatur autem is excessus ρ g.

Nanque ut b σ ad σ ρ, ita b b ad b g, ob similitudinem triangulorum b σ ρ, b b g: & ex decimanona quinti, reliquum ad reliquum, sicut totum ad totum; hoc est b σ ad ρ g, sicut b σ ad σ ρ. Eodem modo ostendemus ν η ad y λ esse, ut b η ad η y. ut autem b σ ad σ ρ, ita b η ad η y. quare b σ ad ρ g est, ut ν η ad y λ: & ex decima sexta sexti rectangulum ex b σ & y λ æquale rectangulo ex ρ g & ν η: quod fuit propositum.

Deinde y λ æqualem esse ipsi m x.

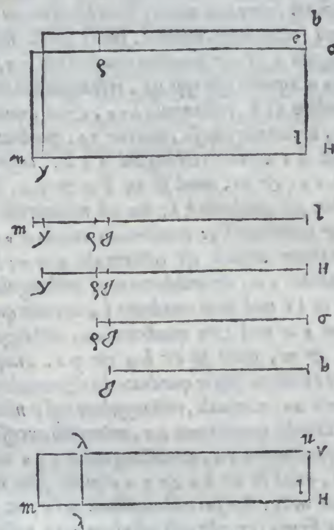
Ostensum est enim ν η ad y λ esse, ut b η ad η y: & similiter ostendetur u l ad m x, ut n l ad l m. cum autem n l ad l m sit, ut b b ad b g; quod antea posuimus; hoc est ut b η ad η y: erit u l ad m x, ut ν η ad y λ: & permutando ut u l ad ν η, sic m x ad y λ. sunt autem u l, ν η æquales. æquales igitur sunt m x, y λ, ut dicebamus. Idem ostendetur & in reliquis eiusmodi.

Postremo m l excedere y η, eodem excessu, quo ρ σ ipsam g b excedit.

Etenim rectangulum m l e æquale est quadrato k l; hoc est rectangulo ζ l θ: additoq; utrinque quadrato æquali; erit rectangulum m l e unà cum quadrato e σ æquale rectangulo ζ l θ unà cum quadrato l η; hoc est æquale quadrato ζ η. sed quadrato e σ æquale est rectangulum ρ σ b, ex duodecima primi conicorum: & eadem ratione quadrato ζ η æquale rectangulum y η b. rectangula igitur m l e, ρ σ b æqualia sunt rectangulo y η b. quare ablato eo, quod est commune utrisque; hoc est rectangulo y η σ, & rectangulo ρ σ b, ut in figura apparet, reliquum reliquo æquale erit; hoc est rectangulum ex e l & excessu, quo m l excedit y η, uidelicet m y æquale rectangulo 4.secundi

lo

*lo ex bσ & excessu, quo yη excedit ρσ, hoc est yρ. est autem ex decima quarta sexti el ad bσ, ut yρ ad my: & componendo el & bσ; hoc est bη ad bσ, ut yρ & my, hoc est excessus, quo ml excedit ρσ; qui sit mρ ad my. sed ostensum est superius bσ ad ρg esse, sicut hσ ad σρ: & ita ostendetur bη ad excessum, quo yη excedit gb; uidelicet yg, sicut hη ad ηy. atque est hη ad ηy, ut hσ ad σρ. bη igitur ad yg est, sicut bσ ad ρg: & permutando bη ad bσ, sicut yg ad ρg. erat autem bη ad bσ, ut mρ ad my. quare mρ ad my est, ut yg ad ρg: & ex decima sexta sexti rectangulum ex mρ, ρg æquale est rectangulo ex my, yg. ergo mρ est æqualis ipsi yg: & my ipsi ρg, ex antecedenti lemmate; hoc est excessus, quo ml excedit ρσ æqualis excessui, quo yη excedit gb: & excessus, quo ml excedit yη, excessui, quo ρσ excedit gb. si enim ad lineam ml applicentur lineæ yη, ρσ, gb: excessus, quo ml excedit gb, qui sit mg, secatur in duobus punctis yρ: & est rectangulum mρg æquale rectangulo myg. ex quo sequitur, quod ante proposuimus.*



*His demonstratis constat rectangulum ex bσ & yλ æquale esse rectangulo ex νη & my. est enim my æqualis ipsi ρg.*

*Itaque cum mlu rectangulum, ut patet, æquale sit rectangulo λνη unà cum eo, quod fit ex νη, & excessu, quo ml excedit λν; hoc est mλ: rectangulum autem ex νη, & mλ æquale sit duobus rectangulis; rectangulo scilicet ex νη & yλ; & rectangulo ex νη & my; ex prima secundi, secta nempe linea mλ in puncto y: rectangulum mlu excedit ipsum λνη rectangulum duobus rectangulis; rectangulo ex νη & yλ; & rectangulo ex νη & my. sed rectangulum ex bη & yλ eadem ratione est æquale tribus rectangulis, uidelicet rectangulo ex νη yλ; rectangulo ex σν yλ; & ei, quod ex bσ yλ. Quorum primum æquale est, immo idem primo, ex ante dictis; tertium secundo, ut monstrauims; medium uero, quod fit ex σν, yλ æquale ei, quod fit ex eu, & mx. est enim σν æqualis ipsi eu, & mx ipsi yλ, ut etiam ostensum est. rectangulum igitur mlu excedit rectangulum λνη rectangulo, quod ex bη, yλ, dempto ex ipso, quod fit ex eu, mx. Quare eo utrinque addito, rectangulum mlu unà cum rectangulo, quod ex eu, mx, excedit rectangulum λνη, eo, quod fit ex bη, yλ. Vnde sequitur duo rectangula, scilicet rectangulum λνη, & rectangulum ex bη, yλ, æqualia esse duobus rectangulis; rectangulo mlu; & rectangulo ex eu, mx, ut proponebatur. Idem continget & in aliis quibuslibet punctis. constat igitur eandem esse sectionem, coni, & conoidis. quare sectio conoidis hyperbole est, cuius diameter ef; & similis ipsi abc, ex diffinitione, cum figurarum in latera eandem habeant proportionem: quæ omnia demonstrasse oportebat.* — 1. secundi

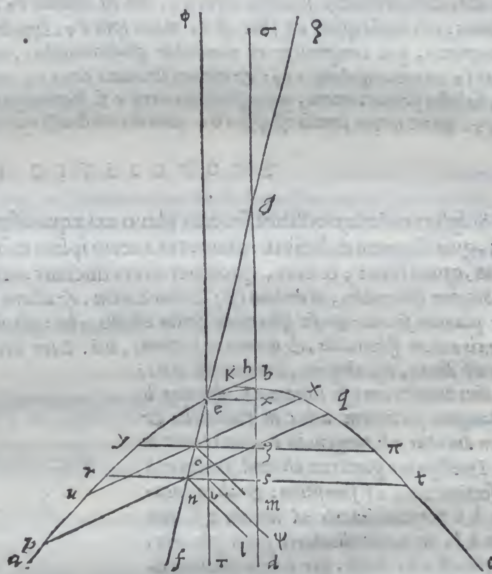
Ex iis, quæ dicta sunt, colligi potest, latus transuersum sectionis circa ef excedere latus transuersum sectionis abc, duplo lineæ bσ.

*A puncto enim, in quo secant sese lineæ gb, nf, ducta linea χψ, æquidistanti ipsi ml, monstrabitur eadem ratione excessum, quo ml excedit ψχ, æqualem esse excessui, quo yη excedit gb. sed monstratum est ml excedere ρσ, eodem illo excessu. cum ergo ml pariter excedat lineas ψχ, ρσ: erunt ψχ, ρσ æquales, & ob similitudinem triangulorum ρσh, ψχn, æquales quoque σh, χn. sunt autem & ipsæ bσ, χe æquales. quare linea en, hoc est latus transuersum sectionis circa ef excedit lineam bh, latus transuersum sectionis abc, lineis bσ, χe; hoc est duplo lineæ bσ, ut dicebamus.*

## PROPOSITIO VI.

Si conoides hyperbolicum ſecetur plano ducto per uerticem coni continentis conoides: ſectio erit hyperbole, haud ſimilis illi, quæ figuram deſcribit: & eius diameter erit communis ſectio planorum; ſecantis ſcilicet figuram; & eius, quod per axem ducitur, erectum ſuper planum ſecans.

*Secetur conoides hyperbolicum plano, ut dictum eſt: ſecetur autem, & altero plano, per axem ducto, & erecto ſuper planum ſecans: ſitq; conoidis ſectio a b c, quæ eſt hyperbole: & eius diameter, & axis conoidis linea b d: plani uero figuram ſecantis ſit recta linea g e f; cum g ſit uertex coni continentis conoides. Dico ſectionem conoidis, quæ fit plano circa e f ducto, eſſe hyperbolen, haud ſimilem ſectioni a b c: & eius diametrum eſſe lineam e f. ducatur linea e h, tangens ſectionem a b c in puncto e: & alia ducatur b k, tangens in b, ſecansq; lineam e h in k. ſumantur autem in ſectione circa e f duo quælibet puncta l m: & ab ipſis demittantur l n, m o perpendiculares ad lineam e f; quæ & ſuper planum, in quo a b c ſectio, perpendiculares erunt; & per n ducantur duæ lineæ; quarum una æquidiſtet ipſi e k, uidelicet p n q; altera uero r n s t, æquidiſtet ipſi k b: & ſimiliter per o ducantur aliæ duæ lineæ, iiſdem æquidiſtantes, uidelicet u o x ipſi e k, & y o ζ π ipſi k b. ſecabit e f lineas p q, u x bifariam in punctis n o, ex quadrageſima ſeptima primi conicorum: & erit ſectionis p e q diameter e n. producatur e g uſque ad ρ; ita ut ſit g ρ æqualis ipſi e g. erit e ρ latus tranſuerſum ſectionis p e q, ut elicitur ex quinquageſima primi conicorum: & per lineas r t, l n ducatur planum. quod cum ſit erectũ ſuper lineam b d axem conoidis, faciet ſectionem circulum, cuius centrum s: & item per lineas y π, m o ducatur aliud planum. faciet id ſimiliter ſectionem circulum, cuius centrũ ζ: & erit quadratum l n æquale rectangulo r n t: & quadratum m o æquale rectangulo y o π. Itaque quoniam ſectionis p e q diameter eſt e n; & latus tranſuerſum e ρ: ducunturq; ordinatim ad diametrum p n, u o: quadratum p n ad quadratum u o, ex uigeſima primi conicorum erit, ut rectangulum ρ n e ad rectangulum ρ o e. ſed rectangulum p n q, hoc eſt quadratum p n ad rectangulum r n t, ex decima ſeptima tertij conicorum eſt, ut quadratum e k ad quadratum k b: & ita rectangulum u o x, hoc eſt quadratum u o ad rectangulum y o π, ut quadratum e k ad quadratum k b. quare quadratum p n ad rectangulnm r n t eſt, ut quadratum u o ad rectangulum y o π: & permutando quadratum p n ad quadratum u o, ut rectangulum r n t ad rectangulum y o π. quorum rectangulorum r n t eſt æquale quadrato l n: & y o π æquale quadrato m o. quadratum igitur p n ad quadratum u o eſt, ut quadratum l n ad quadratum m o. & erat quadratum p n ad quadratum u o, ut rectangulum ρ n e ad rectangulum ρ o e. quare quadratum l n ad quadratum m o eſt: ut rectangulum ρ n e ad rectangulum ρ o e: & idcirco ex uigeſima prima primi conicorum, ſectio, quam facit pla-*



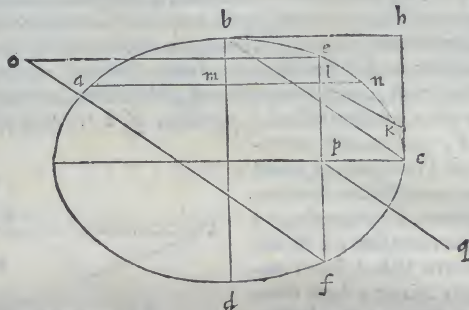
*num circa e f, hyperbole est; eiusq; diameter e f: & latus transuersum e ρ. Esse autem eam hyper*
*bolen dissimilem illi, quæ conoides describit; hoc est ipsi a b c, monstrabitur hoc pacto. Sit hyperbo*
*les a b c transuersum latus linea b σ; dupla scilicet ipsius b g: & secetur conoides alio plano per e,*
*axi æquidistanti, & erecto super planum secans per axem: sit autem eius recta linea e τ. erit se-*
*ctio, quam facit, hyperbole, similis ipsi a b c, ut supra monstrauimus: & eius diameter e τ: quæ*
*secet lineam r t in υ: sitq; transuersum latus e φ: & per e ducatur linea e χ, equidistans ipsi k b,*
*& secans b d in χ. præterea à puncto υ attollatur perpendicularis υ ψ super planum, in quo hy*
*perbole a b c, usque ad sectionem circa e τ. est igitur ut quadratum l n ad rectangulum e n ρ, ita*
*sectionis circa e f rectum latus ad transuersum, ex uigesima prima primi conicorum: & ex eadem,*
23. sexti. *ut quadratum ψ υ ad rectangulum e υ φ, ita sectionis circa e τ rectum latus ad transuersum. qua*
*dratum autem l n ad rectangulum e n ρ habet proportionem compositam ex proportione l n ad e*
*n, & ex proportione l n ad n ρ: & pariter quadratum ψ υ ad rectangulum e υ φ proportio-*
8. quinti *nem. habet compositam ex proportione ψ υ ad e υ, & proportione ψ υ ad υ φ. sed ψ υ ad e*
15. tertii. *υ habet maiorem proportionem, quàm l n ad e n: nam ψ υ maior est, quàm l n: & e υ con-*
Penul. primi. *tra minor, quàm e n. & ψ υ ad υ φ item maiorem habet proportionem, quàm l n ad n ρ:*
*nam υ φ minor, quàm n ρ; constat enim linea υ φ lineis υ e, e φ: & n ρ constat lineis n e, e ρ. qua-*
*rum n e maior est ipsa e υ: & e ρ maior ipsa e φ. quoniam cum e g maior sit x g, quæ est æqualis*
*dimidio lateris transuersi sectionis circa e r; hoc est dimidio e φ, ut patet ex ijs, quæ proxime tra-*
*didimus: erit dupla ipsius e g; hoc est e ρ maior ipsa e φ. Quadrati igitur ψ υ ad rectangulum e υ*
*φ proportio, quæ componitur ex maioribus proportionibus, maior erit, quàm proportio qua-*
*drati l n ad rectangulum e n ρ: & idcirco sectionis circa e τ rectum latus ad transuersum maio-*
*rem habebit proportionem, quàm sectionis circa e f. sectio ergo circa e f non est similis sectioni cir-*
*ca e τ. quare neque similis est ipsi a b c: quod demonstrasse oportebat.*

## PROPOSITIO VII.

Si sphæroides quodlibet secetur plano axi æquidistanti: sectio erit ellipsis, similis illi, quæ figuram describit: diameter autem ipsius erit communis sectio planorum; eius, quod secat; & eius, quod per axem ducitur, erectum super planum secans.

*Secetur sphæroides, ut dictum est; secetur autem, & altero plano per axem ducto, erectoq; super planum secans: & sit sphæroidis sectio ellipsis a b c: plani figuram secantis, sit recta linea e f: axis autem sphæroidis, & diameter sectionis, b d. Dico sectionem sphæroidis, quæ fit plano circa e f ducto, esse ellipsim, similem ipsi a b c: & eius diametrum esse lineam e f. ducatur b h tangens sectionem a b c in puncto b: & item ducatur c h tangens in c, quæ coeant in h. Intelligatur prætcrea aliquod punctum k in sectione circa e f sumptum: & ab eo ducatur k l perpendicularis ad lineam e f. erit iam k l, & perpendicularis super planum, in quo est a b c sectio. per l uero ducatur linea a m l n æquidistans ipsi b h: & per rectas lineas a n, k l, ducatur planum secans sphæroides. quod erit erectum super lineam e f. quare & super lineam b d, ei æquidistantem: & faciet sectionem circulum, cuius centrum m: & idcirco quadratum k l æquale erit rectangulo a l n. Sed rectangulum a l n ad rectangulum e l f est, ut quadratnm b h ad quadratum h c, ex decima septima tertij conicorum. quare quadratum k l ad rectangulum e l f erit, ut quadratum b h ad quadratum h c. iungantur b c: & per e ducatur linea æquidistans b h: per f uero ducaur æquidistans ipsi c b, quæ coeant in o. erit triangulum e f o simile triangulo h c b: & o e ad e f, ut b h ad h c.*

h c. quadratum igitur k l ad rectangulum e l f erit, ut quadratum o e ad quadratum e f: & similiter quadrata aliarum perpendicularium ab eadem sectione ad e f ductarum, ad ea, quæ fiunt ex ipsius e f partibus rectangula, erunt, ut quadratũ o e ad quadratum e f. & sunt o e, e f lineæ inæquales, quoniam & inæquales b h, h c. manifestũ est igitur ex uigesima prima primi conicorum, eius modi sectionem esse ellipsim, alteramq; diametrum ipsius esse lineam e f; alteram uero æqualem ipsi e o. nam linea e f bifariam secta in p, erit rectangulum f p e; hoc est quadratum f p ad quadratum perpendicularis à puncto p eductæ usque ad sectionem, quæ sit p q, ut quadratum f e ad quadratum e o. quare & linea f p ad lineam p q: & dupla ipsius f p; hoc est f e ad duplam p q; hoc est ad alteram diametrum, ut linea f e ad lineam e o. altera igitur diameter æqualis est ipsi e o. demonstrabitur autem similis ei, quæ figuram describit; hoc est sectioni a b c, si intellexerimus planum aliud secans figuram per axem, erectum itidem super planum, in quo a b c sectio, cuius recta linea sit b d. erit enim sectio ea, quæ figuram describit: & eademmet ratione quadrata perpendicularium à sectione ad b d lineam ductarum ad ea, quæ fiunt ex ipsius b d partibus rectangula erũt, ut quadratum o e ad quadratum e f. Quod cum ita sit, & quadrata diametrorum earum sectionum, & diametri ipsæ eandem se proportionem habebunt. unde similes erunt ellipses: quod fuerat demonstrandum. At uero si sphæroides oblongum plano ita secetur: erit linea c f maior eius diameter; cum linea h c maior sit, quàm b h. Contra uero eueniet in sphæroide lato; nam h c minor erit, quàm b h. quare eius minor diameter, erit linea e f.




## IN PROPOSITIONEM XI.

Media sit proportionalis.] *Videntur hic non nulla desiderari in græco codice, qualia fortasse hæc sunt.* καὶ δυνάται ἴσον; *hoc est, ut nos restituimus, & potest æquale.* A

Id enim demonstratum est.] *Præmisit hoc Archimedes tanquã in conicis demonstratum; demonstrauit autem Apollonius in tertio conicorum, propositione decima septima.* B

Ipsi uero n t æqualis est linea t m: quoniam & b r ipsi b m.] *Ex trigesima quinta primi conicorum eiusdem Apollonii.* C

Quoniam igitur similia sunt c a l, t m b triangula &c.] *Et hoc loco desiderantur aliqua in hanc sententiam.* τὸ ἀπὸ τᾶς φ κ καθέτε τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶς α θ, θ γ περιεχόμενον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α λ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α γ: *hoc est quadratum perpendicularis h k ad rectangulum a h c habet eãdem proportionem, quam quadratum a l ad quadratum a c.* D

Patet igitur sectionem esse acutianguli coni sectionem.] *Ex uigesima prima primi conicorum.* F

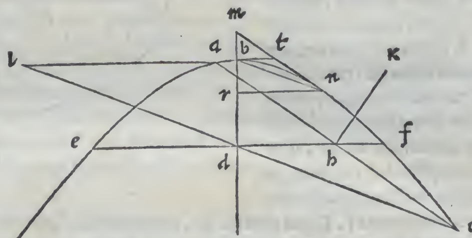
Et eius maiorem diametrum esse a c, minorem uero æqualem ipsi a l.] *Opponitur enim a c minori angulo: & iccirco maior est, quàm a l. ostendetur autem minor diameter æqualis lineæ a l ea ratione, qua in præcedenti usi sumus.* G

## IN PROPOSITIONEM XIIII.

Est autem linea b t minor ipsa t n: propterea quòd & m t minor est ipsa t n; cum b m minor sit b r.] *B t minor est ipsa m t; quoniam minori angulo opponitur, m t autem minor est ipsa t n, ut monstrabimus. ergo b t multo minor est ipsa t n. Sed ipsam m t minorem esse t n,* A

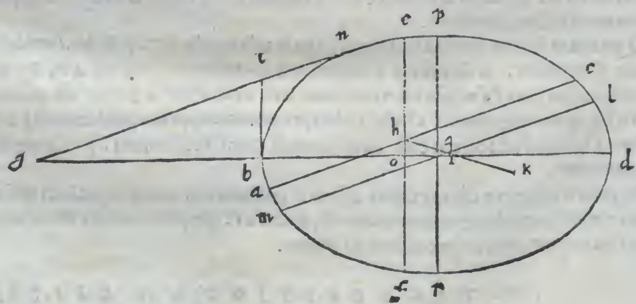
*patebit, cum m b comperta fuerit minor, quàm b r. producatur enim linea b m usque ad o; ita, ut b o sit transuersum latus sectionis a b c. & quoniam linea n m tangens sectionem in puncto n, coit cum b o in m: & ab n ordinatim ducta est n r ad diametrum: erit ex trigesima sexta primi conicorum, ut o m ad m b, ita o r ad b r: & permutando ut o m ad o r, ita b m ad b r. sed o m minor est ipsa o r. ergo & m b est ipsa b r minor, & ex secunda sexti m t minor ipsa t n: quod oportebat demonstrare.*

B Similiter perpendiculari existente n r in obtusianguli coni sectione, diameter ipsius maior erit c l.] *Ita legitur in codicibus omnibus, quos uidi, sed mendose, ut opinor; neque enim quid his uerbis significetur, satis possum intelligere.* FRANCISCVS MAVROLICVS *Messanensis uir omni doctrina, atque optimarum artium studijs eruditissimus, & in Mathematicis ita exercitatus, ut his temporibus Archimedes alter iure optimo dici possit, arbitratur corollarium quoddam esse, quanquam mutilum, ac deprauatum. is enim in quibusdam ad me humanissimis, ac doctissimis literis ita scribit. Illud uero, quod in fine decimæ quartæ propositionis te anxium reddit, corollarium quodam est, sed mutilum, ac mendosum: ita uero corrigendum est. si agatur per a punctum recta a l, parallelus ipsi b t: itemq; per c punctum recta e l, parallelus ipsi n b; quæ paralleli concurrant apud l punctum, ut scilicet propter æquidistátiam linearum, triangulum c a l triangulo n t b simile fiat. tunc sicut c a est maior diameter factæ à secante plano ellipsis, ita & a l erit minor eiusdem diameter: quod facile ostendi potest: & in præcedenti decima tertia propositione fieri potuisset in parabola. nam propter dictorum triangulorum similitudinem, linea c a ad lineam a l est, sicut linea n t ad lineam t b. fuit autem sicut n t ad t b, sic c h ad h k (puncto h per æqua secante ipsam c a): & perinde sic tota, c a ad duplum ipsius h k; hoc est diametros maior ad minorem. eandem igitur rationem habet linea c a ad diametrum minorem, & ad a l. igitur a l æqualis est diametro minori ellipsis, sicut infert corollarium. Hæc Maurolicus, quæ adeo quadrant ad hunc locum, ut non aliter ipse Archimedes scripsisse uideri possit; alioqui mancam quodammodo, atque imperfectam eorum scientiam, tradidisset.*




## IN PROPOSITIONEM XV.

A Similiter iis, quæ ante tradita sunt, ostendentur quadrata perpédicularium, &c.] *Intelligatur enim púctum in sectione sumptum k: & ab eo ad a c lineam perpédicularis demittatur k h; quæ etiam perpendicularis erit super planum, in quo est a b c sectio: per h uero ducatur e f ad angulos rectos ipsi b d: & per e f, k h rectas*



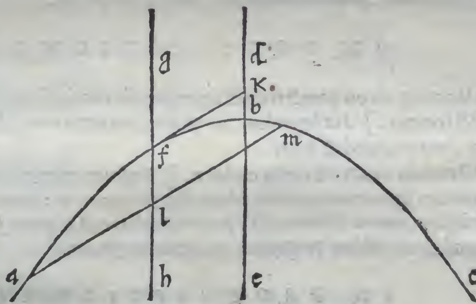
ctas lineas ducatur planum secans conoides; quod quidem erectum erit super axem b d: & faciet sectionem circulum, cuius centrum o. quadratum igitur k h erit æquale rectangulo e h f: & rectangulum e h f ad rectangulum a h c, ex decima septima tertij conicorum, eam habet proportionem, quam quadratum b t ad quadratum t n: & ob id quadratum k h ad rectangulum a h c eandem habebit proportionem, quam quadratum b t ad quadratum t n: & similiter idem contingere ostendetur, alijs perpendicularibus à sectione ad a c, lineam demisis. quare sectio erit coni acutianguli sectio: & eius diameter ipsa linea a c.

Si sphæroides latum plano secetur, alia quidem eadem erunt, &c.] *Eadem omnia fiant in sphæroide lato, quæ prius facta fuere in oblongo. monstrabitur plano per a c lineam ducto, sectionem factam, esse coni acutianguli sectionem: & eius minorem diametrum esse lineam a c, intra sphæroides contentam. nam rectangulum p q r ad rectangulum m q l eam habet proportionem, quam quadratum b t ad quadratum n t: minus autem est rectangulum m q l rectangulo p q r; quòd linea, q l minor sit ipsa q r. quadratum igitur n t minus est quadrato b t. quare quadrata perpendicularium à sectione ad a c, ductarum, maiora erunt rectangulis a h c: & a c minor erit sectionis diameter, ut proponebatur.* B

## IN PROPOSITIONEM XVI.

At in rectanguli coni sectione à quouis puncto eorum, quæ in sectione &c.] A

*Sit rectanguli coni sectio, seu parabole a b c, cuius diameter d b e: & sumptum sit in sectione quoduis punctum f: & per f ducatur g f h, æquidistans diametro. Dico lineæ g f h partem eam, quæ est à puncto f uersus sectionis uertinem; hoc est uersus g, extra sectionem cadere; quæ autem est uersus h, cadere intra. ducatur enim linea tangens sectionem in f puncto; quæ coeat cum diametro in k: & per a ducatur a l m, æquidistans ipsi f k. secabitur iam linea a l m ab ipsa f h, in partes æquales, ex quadragesima sexta primi conicorum: & similiter omnes lineæ per quoduis sectionis punctũ*




*ductæ eidem æquidistantes. efficitur enim linea f h diameter sectionis a f m ex corollario quinquagesimæ primæ primi conicorum. Quare necessarium est, ipsam f h intra sectionem cadere, & f g extra: quod fuerat monstrandum.*

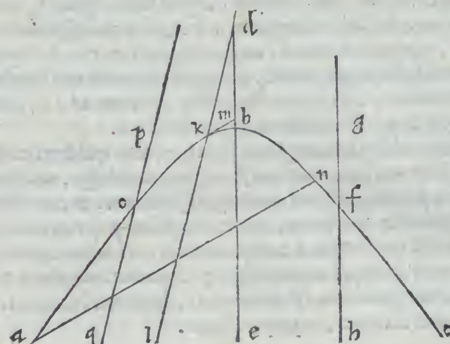
*ALITER. Si linea f h non cadet intra sectionem; cadet extra: & g f h tanget sectionem in puncto f. quare ex uigesima quarta primi conicorum coibit cum diametro, quæ iam posita est diametro æquidistans: quod fieri non potest. constat igitur uerum esse, quod proponebatur.*

Sectio erit obtusianguli coni sectio: eius autem diameter erit linea, à uertice coni in conoide ducta est.] *Præmisit hoc Archimedes in duodecima huius: & nos eodem in loco propositione prima, & sexta demonstrauimus.* B

Sed in sectione coni obtusianguli si à quouis puncto in sectione sumpto &c.] *Sit coni obtusianguli sectio, seu hyperbole a b c, cuius quidem uertex sit b: & uertex coni continentis conoides, seu centrum sectionis, ut Apollonius uocat, sit d: à quo ducatur linea in quácunque sectionis partem libuerit: & ei æquidistans alia ducatur. Dico lineæ æquidistantis partem eam, quæ conuexa respicit sectionis, extra sectionem cadere; quæ uero contraria, intra. Ducta sit primum à d in sectionem per punctum b linea d b e, quæ erit diameter sectionis: sumptoq; quouis puncto f in ea, & per f ducta g f h linea, æquidistanti ipsi d b e, cadet f g extra sectionem; f h uero intra. nisi enim* C

ita

ita sit: cadet f h extra; & continget sectioné in puncto f. quare g f h producta coibit cum diametro: quod est absurdum; posita enim fuerat diametro æquidistans. Quòd si linea à d ducta transeat per aliud quoduis sectionis punctum, ut per k; quæ sit, d k l: ducemus lineam k m tangentem sectionem in k: & per a ipsi k m æquidistantem faciemus a n. secabit igitur linea d k l lineam a n bifariam, ex quadragesima septima primi conicorum. & fiet diameter sectionis a k n. sumpto autem quolibet puncto in sectione, quod sit o, ducatur p o q, æquidistans ipsi d k l. cadet similiter p o extra sectionem; & o q intra; alioqui continget ipsa p o q sectionem in o: & coibit cum diametro d k l: quod fieri nequit; erat enim ei æquidistans. quare manifeste constat propositum.




D Quare sectionem faciet coni sectionem.] *Ex duodecima huius, et ijs, quæ nos eo loco demonstrauimus, propositirne prima, quarta, & quinta.*

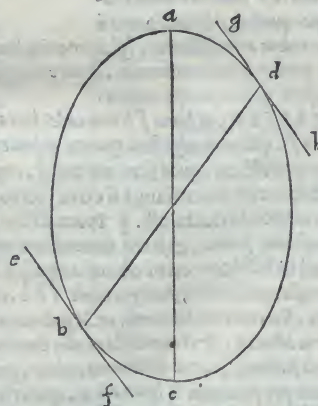
## IN PROPOSITIONEM XVII.

A Alioquin ab eo puncto ducta perpendicularis super planum secans, cadet extra coni sectionem.] *Ita legendum, ut opinor, non intra coni sectionem, codex etiam græcus ἐντὸς habet, pro eo, quod est ἐκτὸς.*

B Ostensum enim est intra cadere.] *Positum enim est in duodecima huius, si conoidum, aut sphæroidum figurarum qualibet plano secetur per axem: lineas ductas à punctis, quæ in figuræ superficie sunt, non in sectione ipsa, perpendiculares ad planum secans, intra figuræ sectionem cadere: quod & nos ibidem propositione tertia demonstrauimus.*

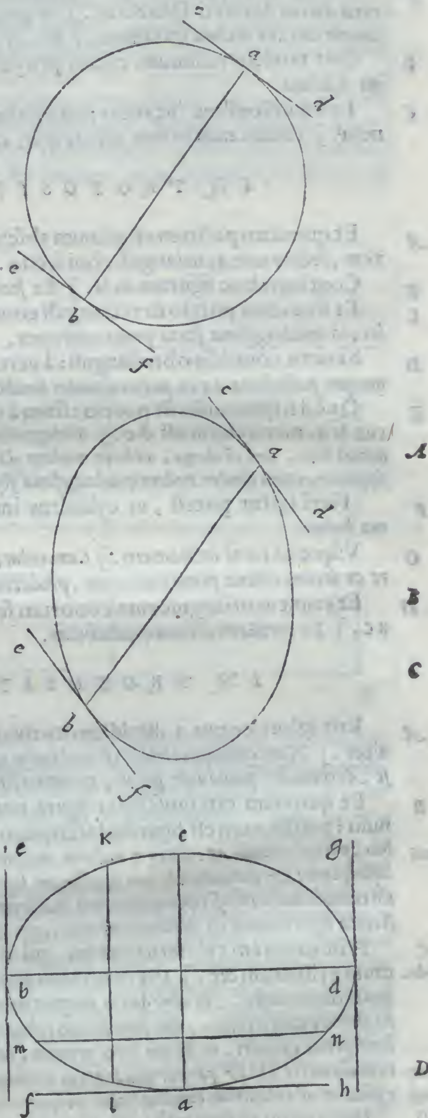
## IN PROPOSITIONEM XVIII.

A Necesse est igitur idem esse planum ductum per axem, & per utrunque contactum.] *Sit sphæroides a b c d, cuius axis a c: & sint duo plana æquidistantia, quæ id contingant, non erecta super axem e f, g h: contingat autem e f planum sphæroides in puncto b: & g h in d. Dico unum, atque idem esse planum, quod per axem, & per utrunque contactum ducitur; alioquin erunt duo plana super idem planum erecta, transeuntia per eandem lineam, quæ super planum illud erecta non sit. planum enim per axem ductum, & per contactum b, erectum erit & super planum e f, ex præmissa; & ex decima quarta undecimi Eucl. super planum g h, ei æquidistans. Eadem quoque ratione planum ductum per axem, & per d contactum erectum erit super utrunque planum e f, g h. quare duo plana ducta per eandem lineam; hoc est per axem a c, quem super plana illa æquidistantia non esse erectum ante posuimus, erunt*



erecta super idem planum, uidelicet super e f, aut super g h: quod fieri non potest. sequeretur enim ex eo trianguli duos angulos æquales esse duobus rectis. idem ergo planum erit, in quo & axis & contactus ipsi habentur: quod fuerat demonstrandum.

At si duæ rectæ lineæ inter se æquidistantes acutianguli coni sectionem cõtingant &c.] Monstrabitur id ex elementis conicis, non solum in ellipsi, sed & in circulo. Sit ellipsis, uel circulus a b: sintq; c d, e f rectæ lineæ æquidistantes, quæ ellipsim, uel circulum contingant; c d quidem in puncto a; e f autem in b: & iungantur puncta contactuum ducta a b. Dico a b per centrum transire. nisi enim transeat per centrum: coibunt ipsæ c d, e f, ex uigesima septima secundi Apollonij: quod est absurdum; nam positæ sunt æquidistantes. ergo a b per centrum transibit, atque in eadem recta linea erunt & centrum, & contactuum puncta: quod monstrare uolebamus.




## IN PROPOSITIONEM XIX.

Sit enim sectio sphæroidis a b c d acutianguli coni sectio.] Non erit sectio ea semper coni acutianguli sectio, uel ellipsis, sed quandoque circulus: cum scilicet planum erectum sit super axem: quod & ipse Archimedes postea innuit.

Transibit igitur ea per centrum.] Per ea, quæ proxime ostendimus in ellipsi, & circulo.

Constat lineas ductas à punctis a c æquidistantes ipsi b d contingere sectionem: & extra sphæroides cadere.] Quoniam enim a c, b d diametri sunt sectionis, uel principales, uel ex generatione: sumpto in ea qnolibet alio puncto m, & per m ducta m n, æquidistanti b d, secabit a c ipsam m n bifariam. ergo ex sexta secundi conicorum, quæ sectionem contingit ad a punctum, æquidistans est ipsi m n. quare & ipsi b d. quæ igitur ab a ducta est æquidistans ipsi b d, contingit sectionem; & similiter ostendetur, quæ à c ducitur eidem b d æquidistans, sectionem contingere. sequitur ergo, ut extra sphæroides cadant: quod erat ostendendum.

Quòd si planum æquidistans contingentibus planis non ducatur per centrum &c.] Ducta enim per k æquidistans ipsi b d, cadet extra sectionem ad partes b, in quibus minor est portio; ad partes uero d, intra; nanque eam diameter a c secabit bifariam, ex quadragesima septima primi conicorum. Quòd si quis contendat, extra sectionem cadere omnino; tanget sectionem in k: & coibit cum diametro b d, ex uigesima quinta eiusdem; quod est absurdum;

*ſurdum; nam poſita eſt eidem b d æquidiſtans. Eadem erit demonſtratio, & in ipſo circulo.*

## IN PROPOSITIONEM XXI.

A Cadet eius ſuperficies extra portionem, quia uel conoides eſt, uel ſphæroides, non maius dimidio ſphæroide.] *Si quidem conoides eſt: cadet ſuperficies cylindri extra portionem eius, ex decima ſexta huius. ſi uero eſt ſphæroides, ex decima nona idem continget.*

B Erit tandem reſiduum minus propoſita ſolida magnitudine.] *Ex prima decimi Euclidis.*

C Et à diuiſionibus ducantur rectæ lineæ æquidiſtantes ipſi a c ad coni uſque ſectionem.] *Coibunt enim hæ cum ſectione ipſa, ex decima nona primi conicorum.*

## IN PROPOSITIONEM XXII.

A Et quoniam poſitum eſt planum abſcindens portionem non eſſe erectum ſuper axem, ſectio erit acutianguli coni ſectio.] *Ex decima quinta huius.*

B Contingit hoc figuram in b.] *Ex ſecunda parte decimæ ſeptimæ huius.*

C Et ſi quidem portio ſit rectanguli conoidis &c.] *Secabit ea lineam a c in partes æquales, ex quadrageſima ſexta primi conicorum.*

D Si uero conoidis obtuſianguli: à uertice coni continentis conoides &c.] *Et hoc quoque pacto linea a c in partes æquales ſecabitur, ex quadrageſima ſeptima primi conicorum.*

E Quòd ſi ſpheroidis ſit portio: linea à centro ducta ad b, intra portionem recipiatur b d. manifeſtum eſt &c.] *Sic legendum, ut opinor. uidentur enim in græco codice deſiderari hæc.* ἀπὸ τοῦ κέντρου, *ad hunc modum* εἰ δὲ σφαιροειδέος ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ β ἀχθεῖσα εὐθεῖα, *ſequitur autem illud ex eadem quadrageſima ſeptima primi conicorum.*

F Fieri igitur poteſt, ut cylindrus inueniatur axem habens b d &c.] *Ex decima huius.*

G Vſque ad coni ſectionem.] *Cum enim æquidiſtent ipſi a c: & ipſi y u æquidiſtabunt. quare ex decima octaua primi conicorum, productæ in utranque partem coibunt cum ſectione.*

H Et erunt acutiangulorum conorum ſectiones ſimiles ei; quæ eſt circa diametrum a c.] *Ex corollario decimæquintæ huius.*

## IN PROPOSITIONEM XXIII.

A Erit igitur conus z dimidium totius cylindri: quoniam eiuſdem coni eſt ſeſquialter.] *Nam cylindrus triplus eſt coni baſim eandem, & æqualem altitudinem habentis: quod ipſe Archimedes paulo ante poſuit, & demonſtrauit Euclides propoſitione decima duodecimi libri.*

B Et quoniam circumſcripta figura minus excedit inſcriptam, quàm portio conum: perſpicuum eſt figuram inſcriptam cono z maiorem eſſe.] *His enim ſic ſtantibus, portio conoidis ad conum z habebit maiorem proportionem, quàm circumſcripta figura ad* 8.quinti *inſcriptam: & permutando per uigeſimam ſeptimam quinti Euclidis ex traditione campani, portio conoidis ad circumſcriptam figuram maiorem habebit, quàm conus z ad inſcriptam. Sed circũſcripta figura maior eſt portione conoidis. ergo & inſcripta multo maior erit cono z.*

C Primus autem cylindrus eorum, qui in toto ſunt cylindro axem habens d e ad primum cylindrum &c.] 11.duodec. *Qui enim eadem altitudine ſunt cylindri, proportionem habent eandem quam eorum baſes. At uero quam proportionem habet circulus circa diametrum a c; hoc eſt baſis primi cylindri eorum, qui ſunt in toto cylindro, ad circulum circa diametrum k l; ad baſim ſcilicet primi cylindri, in figura inſcriptorum, eandem habet quadratum diametri a c ad quadratum diametri k l: & pariter quadratum ſemidiametri d a ad quadratum ſemidiametri k e. ergo* 2.duodec. 15.quinti. *cylindrus ad cylindrum eandem habet proportionem, quam quadratum d a ad quadratum k e.*

D Hæc autem eadem eſt ei, quam b d habet ad b e.] *Ex uigeſima primi conicorum.*

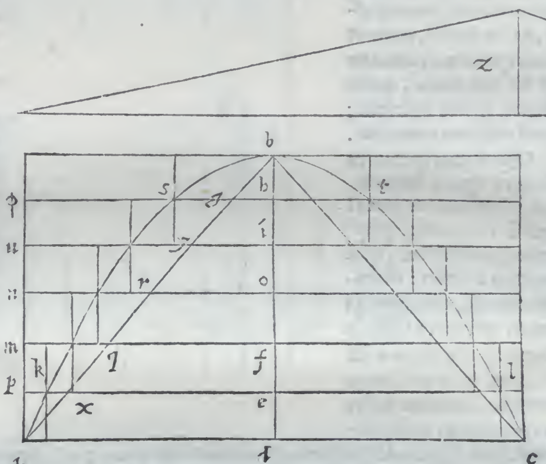
E Et ei, quam d a ad e x.] *Ex quarta ſexti. æquiangula enim ſunt triangula b a d, b x e.*

F Similiter oſtendetur & ſecundus cylindrus eorum, qui ſunt in toto cylindro &c.] *Per eadem enim, quæ prius, oſtendetur primus cylindrus, eorum, qui ſunt in toto cylindro ad ſecundum*

cundum cylindrum eorum, qui in figura inscripta, eam habere proportionem, quam habet a d ad q f, & cum secundus cylindrus eorum, qui sunt in toto cylindro, æqualis sit primo; & ipse ostendetur ad secundum eorum, qui in figura inscripta, eandem habere proportionem, quam habet p e; hoc est a d ad q f. & ita deinceps in reliquis.

Et omnes cylindri, qui in eo cylindro continentur, cuius basis est circulus circa G
diametrum a c, & axis d b.] *In græco codice ita habetur.* καὶ πάντες οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ κυ
λίνδρῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξων δὲ ἐστὶν ἁ δ η εὐθεῖα, *& reliqua, & pau* H
*lo post,* ὥστε καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, οὗ ἄξων ὁ δ ι. *sed legendum, ut opinor,* δ β *utrobique, non* δ ι: *& infra.* πολλῷ ἄρα καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος, *expungendum illud* πολλῷ. *nisi enim omnes assumantur cylindri, qui in toto cylindro sunt, cuius axis d b, non uideo, quo pacto demonstrari possint esse maiores, quàm dupli figuræ inscriptæ, cum non sint. cylindri nanque omnes in cylindro contenti, cuius axis est d i, tantum abest, ut sint maiores, quàm dupli inscriptæ figuræ, ut etiam sint multo minores.*

*Quod ut manifeste pateat, sit m f semidiameter basis tertij cylindri, eorum, qui sunt in toto cylindro: & n o semidiameter basis quarti cylindri: pars uero eius interiecta inter a b, b d sit r o: quinti cylindri basis semidiameter sit u i: & y i pars eius inter easdem lineas intermedia: sexti uero cylindri semidiameter basis sit φ h, & pars eius intermedia g h. primus igitur cylindrus eorũ, qui in toto cylindro continentur, axem habens d e ad primum cylindrũ eorum, qui continentur in figura portioni inscripta, cuius idem est axis, eam proportionem habet, quam linea a d ad lineam x e: & secundus cylindrus eorum, qui sunt in toto cylindro axem habens e f ad secundum cylindrum figuræ inscriptæ, cuius idem axis, eam habet proportionem, quam linea p e; hoc est a d ad q f: & tertius cylindrus ad tertium eam habet, quam m f ad r o: & item quartus ad quartum, quam n o ad y i: & quintus similiter ad quintum, hoc est ad ultimum eorum, qui in figura inscripta, quam u i ad g h: sextus autem cylindrus, hoc est ultimus eorum, qui in toto sunt cylindro, non habet alium in figura inscripta, ad quem referatur; nec item linea φ h habet lineam ei respondentem. sunt igitur quædam magnitudines, sex uidelicet cylindri, qui in toto cylindro sunt, quorum unusquisque habet axem æqualem ipsi d e: & aliæ item magnitudines, lineæ, quæ sunt semidiametri basium eorum cylindrorum, numero illis æquales, uidelicet a d, p e, m f, n o, u i, φ h: & quam proportionem habent prius sumptæ magnitudines, eandem habent & posterius sumptæ; quoniam cylindri sunt æquales inter se, & lineæ item æquales: referunturq́; è sex cylindris, quinque ad alios quosdam cylindros in figura inscripta contentos; extremus autem ad nullum refertur. & similiter è sex lineis, quinque tantum referuntur ad quasdam alias lineas, & eisdem proportionibus; cum extrema non habeat, ad quam referatur. Quare ex secunda huius omnes cylindri, qui sunt in toto cylindro, ad omnes cylindros in figura inscripta contentos, eam proportionem habent, quam omnes lineæ a d, p e, m f, n o, ui, φ h ad omnes lineas x e, q f, r o, y i, g h. At sex illæ lineæ cum his quinque comparatæ ex prima huius, maiores sunt, quàm duplæ; nanque cum lineis se se æqualiter excedentibus, excessu, qui sit æqualis minimæ, dempta maxima earum, comparantur totidem lineæ, omnes maximæ illarum æquales: quod sic patet. Quam enim proportionem habet b d ad b e, eandem habet ex quarta sexti a d ad x e: & quam habet b e ad b f, eandem habet x e ad q f: & quam*



*bf ad bo, eandem qf ad ro: & ita de reliquis. sed cum lineæ bd, be, bf, bo, bi, bh sese æqualiter excedant, & excessus sit æqualis minimæ; hoc est ipsi bh: & lineæ ad, xe, qf, ro, yi, gh sese æqualiter excedent, excessu minimæ earum æquali. ex quibus sequitur, Omnes cylindros, qui sunt in toto cylindro, cylindrorum in figura inscripta contentorum, maiores esse, quàm duplos. quare et totus cylindrus, cuius axis est bd erit maior, quàm duplus figuræ inscriptæ; quod mõstrare oportebat.*

a p m n u φ d e f o i h

a x q r y θ d e f o i h

K Quoniam igitur inscripta figura minor est portione: & inscripta à circumscripta minus exceditur, quã portio à cono: manifestum est, circumscriptam minorem esse z cono.] *Rursus cum ita sit: conus z ad portionem conoidis, maiorem habet proportionem, quàm circumscripta figura ad inscriptam; & permutando conus z ad circumscriptam figuram, maiorem habet, quàm portio conoidis ad inscriptam. sed inscripta figura minor est portione conoidis. circumscripta igitur multo minor erit cono z.*

L Ergo & omnes cylindri, qui in toto cylindro sunt cuius axis db ad omnes cylindros in figura circumscripta contentos &c.] *Hæc omnia necessariam habent demonstrationem, ex prima parte primæ, & secundæ huius, iisdem, sicuti prius, dispositis; præterquam quòd hic utrobique æquales numero assumuntur magnitudines.*

## COROLLARIVM.

Ex his constat cuilibet portioni conoidis rectanguli abscissæ plano super axem erecto, conum illum rectum esse æqualem, qui basim habeat eandem portioni, & axẽ, qui ad axem portionis proportionem habeat sesquialteram.

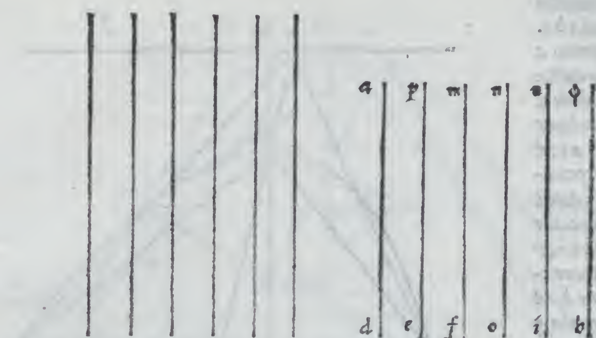
## IN PROPOSITIONEM XXIIII.

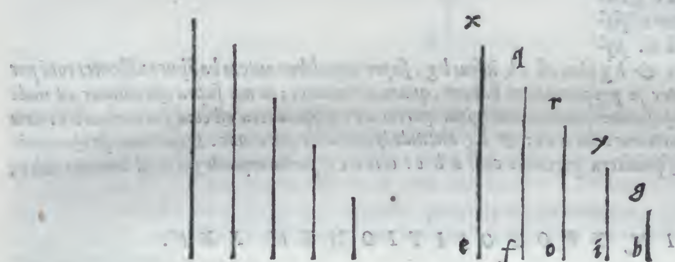
A Quæ lineam ac bifariam secabit.] *Ex quadragesima sexta primi conicorum, ut etiam superius est adnotatum.*

B Sectio est acutianguli coni sectio.] *Ex decima tertia huius.*

C Fieri potest, ut cylindrus inueniatur axem habens in recta linea bd.] *Ex decima huius.*

D Fieri itidem potest, ut & conus inueniatur uerticem habens b punctum &c.] *Ex*




*Ex nona huius.*

Et plana portionum pertingent ad ſuperficiem portionis &c.] *Quoniam & lineæ, per quas plana ducuntur ex utraque parte productæ ad coni ſectionem perueniunt, ut in uigeſima ſecunda huius dictum eſt.*

Nam portiones æqualem habentes altitudinem adinuicem ſunt ſicuti baſes.] *Quo modo hoc monſtretur, diximus in undecimam huius, propoſitione ſecunda.* F

Baſes autem, quoniam ſimiles acutiangulorum conorum ſect iones ſunt, eandem proportionem &c.] *Ex ſeptima huius.* G

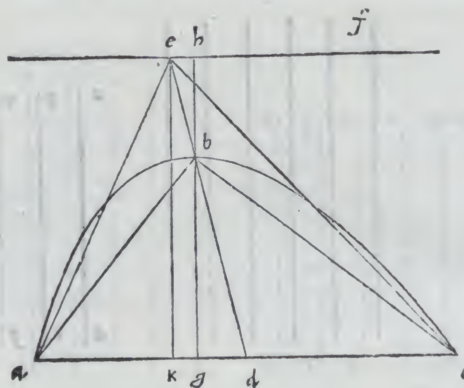
Eandem habet b d ad b e longitudine.] *Corrigendus eſt hoc loco græcus codex, nanque habet δυνάμει, pro eo, quod eſt, μήκει. ſequitur autem id ex uigeſima primi conicorum, quòd paraboles a b c, in qua uertex b, diameter ex generatione fit ipſa b d.* H

## COROLLARIVM.

Colligitur etiam ex his, cuilibet portioni conoidis rectanguli abſciſſæ plano non erecto ſuper axem, coni portionem illam eſſe æqualem, quæ baſim habeat eandem, & axem axis portionis ſeſquialterum, qui cum diametris baſis conſimilibus æquales angulos contineat.

*Sit enim conoidis rectanguli portio a b c, cuius baſis ſpatiũ coni acutianguli ſectione circa diametrũ a c contentum, & axis b d: ſitq́; portio coni a b c, baſim habens eandem portioni, & axem eundem. erit iam portio conoidis portionis coni ſeſquialtera. producatur autem d b uſque ad e; ita, ut e d ſit ſeſquialtera ipſius b d: & intelligatur coni portio a e c, cuius baſis eadem portionibus di*

ctis, & axis e d. Dico portionem coni a e c æqualem esse conoidis portioni a b c. secetur enim coni portio a e c plano per axem ducto: & sit sectio triangulum a e c: & per e ducatur linea e f, æquidistans ipsi a c: à puncto autem b perpendicularis ad lineam a c demittatur b g: & producatur quousque secet e f in h: & ab e rursus demittatur alia perpendicularis e k ad a c. erunt iam triangula g b d, h b e similia. quare h b ad b e erit, ut g b ad b d: & permutando, componendoq; h g ad b g, ut e d ad b d. sed erat e d sesquialtera ipsius b d. sesquialtera est igitur & h g; hoc est e k ipsius b g. super æqualibus autem basibus existentes coni portiones eandem inter se proportionem habent, quam altitudines; ut nos supra ostendimus ad undecimam huius, propositione quarta. coni igitur portio a e c sesquialtera est coni portionis a b c: nam e k altitudo est portionis coni a e c: & b g altitudo ipsius a b c portionis. Quod cum sit & conoidis portio a b c sesquialtera portionis coni a b c: erit a e c portio æqualis portioni conoidis a b c; ut dicebamus.




9. quinti.

## IN PROPOSITIONEM XXV.

A Et quoniam sunt æquales b h, k l, & ipsæ c h, a q æquales erunt.] *Ostensum est hoc in quarta huius.*

B Sed coni portio, cuius uertex l, & conus, cuius uertex b habent inter se proportionem compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.] *Ex ijs, quæ nos ostendimus ad undecimam huius, propositione octaua.*

C Quare portio coni, cuius uertex l ad conum, cuius uertex b compositam habet proportionem ex ea, quam habet k a ad e h, & ex ea, quam l m ad b h.] *Nam quod fit ex diametris sectionis coni acutianguli ad quadratum e c eam proportionem habet, quam k a ad e h: quod sic patet. ducatur à puncto a æquidistans ipsi l k; quæ sit a n: & ab f ducatur f n æquidistans ipsi e c; quæ coeat cum a n in puncto n: linea autem f n secet lineam l k in o. erit altera diameter sectionis coni acutianguli æqualis lineæ f n; ex decima tertia huius; & erit f n æqualis ipsi e c. nanque f o ad o n est, ut f k ad k a: & componendo f n ad o n, ut f a ad k a. sed k a est dimidia ipsius f a. ergo & o n dimidia est ipsius f n. & est o n æqualis h e; utraque enim æqualis ipsi q a. lineæ igitur f n, c e, quarum dimidiæ sunt æquales, & ipsæ æquales sunt; & æquales alteri diametro sectionis coni acutianguli, cuius maior diameter est f a. habet autem eiusmodi sectio ad circulum, cuius diameter est c e eam proportionem, quam rectangulum ex f a, c e ad quadratum c e; ex sexta huius; hoc est, quam f a ad c e; cum eandem altitudinem habeat: & quam earum dimidiæ k a ad e h: quod monstrare uolebamus.*

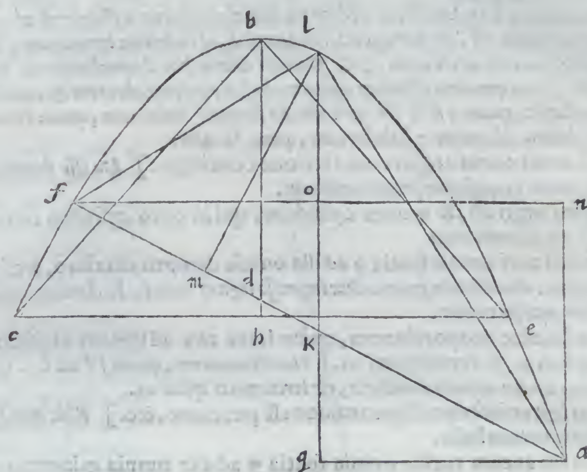
2. sexti.

1. sexti.

D Habetq; l m ad k l eam, quam q a ad a k.] *Aequiangula enim sunt triangula l m k, a q k.*

E Earum autem proportionum, quæ est a k ad a q eadem est ei, quæ l k ad l m.] *Ostensum est supra, q a ad a k eam habere proportionem, quam l m ad l k. quare & conuertendo a k ad q a habet eandem, quam l k ad l m.*

F Perspicuum est igitur portionem coni, cuius uerte x l æqualem esse cono, cuius uertex




uertex b.] *Concluditur ex ante dictis portionem coni, cuius uertex est l, ad conum, cuius uertex b, eam habere proportionem, quam habet l k ad b h. nam utraque harum proportionum componitur ex iisdem proportionibus; ex ea scilicet, quam habet l k ad l m; & ex ea, quam l m ad b h; Quòd cum l k, b h sint æquales: & portio coni, cuius uertex l, & conus, cuius uertex b sunt æquales: & insuper portiones conoidis æquales. portio enim, cuius uertex l sesquialtera est portionis coni, ex antedicta; portio uero, cuius uertex b ex uigesima tertia huius, est etiam ipsius coni sesquialtera.*

## IN PROPOSITIONEM XXVI.

Itaque conus, cuius axis b d ad conum, cuius axis b h proportionem habet compositam ex ea, quam habet a d ad h e potestate, & ex ea, quam b d habet ad b h longitudine.] *Nam circulus circa diametrum a c ad circulum circa diametrum e f proportionem habat eam, quam quadratum a c ad quadratum e f; ex prima duodecimi: & propterea etiam eam, quam quadratum semidiametri a d ad quadratum semidiametri h e; hoc est, quam habet a d ad h e potestate.* A 15.quinti.

Quam uero proportionem habet a d ad h e potestate, eandem habet longitudine b d ad b h.] *Ex uigesima primi conicorum.* B

Hæc autem eadem est ei, quam d b quadratum habet ad quadratum h b.] *Ex uigesima tertia sexti.* C

## IN PROPOSITIONEM XXVII.

Et quæ tripla lineæ ad axem adiectæ.] *Linea ad axem adiecta est (ut ipse in principio scribit) quæ interiicitur media inter uerticem conoidis, & uerticem coni continentis conoides; hoc est, quæ in ipsa hyperbola, dimidia est transuersi lateris figuræ. Inferius eam, quæ ex centro appellat unà cum Apollonio.* A

Et quoniam circumscripta figura inscriptam minus excedit quàm portio conum z.] *Vnde hoc sequatur, dictum est superius in uigesima tertia huius.* B

Sit igitur b r tertia pars ipsius b d, erit g d ipsius h r tripla.] *Nam g b tripla est h b: & b d item tripla b r. quare ex prima quinti g b & b d iunctæ; hoc est g d tripla est h b & b r; hoc est ipsius b r.* C

Et

D Et quoniam cylindrus, basim habens circulum circa diametrum a c, & axem b d.] *Ex decima duodecimi Euclidis.*

E Proportionibus non similiter ordinatis habebit dictus cylindrus ad z conũ &c.] *Codex græcus mendosus est, & fortasse ita restituendus, ut in decima tertia huius,* ἕξη ὖν ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων τὸν αὐτὸν λόγον, &c. *procedit autem hæc demonstratio ex uigesima tertia quinti Euclidis. Nam quoniam cylindrus ad conum basim eandem habentem & eundem axem, eam proportionem habet, quam g d ad h r: & conus ad conum z habet eam, quam f d ad g d. ex æquali igitur cylindrus ad conum z habebit eam, quam f d ad h r.*

F Quod in omni obtusianguli coni sectione contingit.] *Ita esse demonstrat Apollonius uigesima prima propositione primi conicorum.*

G Manifestum ergo est, & omnes cylindros, qui in toto cylindro sunt, ad cylindros, &c.] *Ex secunda huius.*

H Ostensum est autẽ omnia spatia 9 ad illa omnia dempto maximo, &c.] *Ex secunda parte tertiæ huius. ubi autem in græco codice impresso legitur* δεικτέον δὲ, *scribendum* δέδεικται δὲ, *ut etiam habent antiqui codices.*

I Maiorem habere proportionem, quàm linea m x ad lineam utrisque æqualem; & dimidiæ ipsius x; & tertiæ parti m.] *Hoc est maiorem, quàm f d ad h r. est enim f d æqualis ipsi m x: & h r æqualis dimidiæ x, & tertiæ parti ipsius m.*

K Quoniam igitur inscripta figura minor est portione, &c.] *Vide quæ scripsimus supra in uigesimam tertiam huius.*

L Ostensum est autem rursus omnia spatia 9 ad alia omnia minorem proportionem, &c.] *Ex prima parte tertiæ huius.*

## COROLLARIVM.

Manifestum est ex modo demonstratis, cuilibet portioni conoidis obtusianguli abscissæ plano super axem erecto, conum illum rectum esse æqualem, cuius basis sit eadem, & axis, qui ad axem portionis, proportionem habeat, quam utraque linea; & quæ sit æqualis axi portionis, & quæ tripla lineæ ad axem adiectæ, habet ad lineã utrique æqualem; axi portionis, & ei, quæ sit dupla lineæ ad axem adiectæ.

## IN PROPOSITIONEM XXVIII.

A Secabit eadem ratione bifariam ipsam a c.] *Ex ijs, quæ dicta sunt in uigesima secunda huius. id uero monstrauit Apollonius quadragesima sexta primi conicorum.*

B Quod conoides in b puncto continget.] *Ostenditur id in decima septima huius.*

C Sectio erit acutianguli coni sectio, cuius diameter maior c a.] *Ex decima quarta huius.*

D Cylindrum inuenire poterimus habentem axem in recta linea b d, &c.] *Ex decima huius.*

E Rursus & conum inuenire poterimus uerticem habentẽ punctum b, &c.] *Ex nona.*

F Hoc inuento erit portio coni basim habens eandem dictis portionibus, & axem eundem.] *Græcus codex ita restituendus est, ut mihi uidetur.* εὑρεθέντος ὖν ἐσσεῖται τὸ ἀπότμημα κώνυ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῶτε τόμω, καὶ τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν.

G Dico portionem conoidis cono z esse æqualem.] *Et hoc loco, ut opinor, ita restituendus est, corrigendusq́; græcus codex.* φημὶ δὴ τὸ τμῆμα τῶ κωνοειδέος ἶσον εἶμεν τῷ ↓ κώνῳ. εἰ ὖν μὴ ἐςὶν ἴσον τὸ τῶ κωνοειδέος τμῆμα τῷ κώνῳ τῷ ↓, εἰ δυνατὸν, ἔςω μείζων.

H Bases autem cum similes acutiangulorum conorum sectiones sint &c.] *In græco codice desiderantur hæc,* αἱ δὲ βάσεις αὐτῶν. *sequitur autem id ex corollario decimæ quintæ huius, & ex septima.*

I Quam uero proportionem quadratum a d habet ad quadratum k e, eandem habet rectangulum f d b ad rectangulum f e b &c.] *Ex uigesima primi conicorum, quòd b d diameter sit sectionis coni obtusianguli; & b f transuersum figuræ latus.*

K Quoniam f d ducta est per h, in quo lineæ, quæ sunt sectioni proximæ conueniũt.]

*Idem*

*Idem eſt, ac ſi dixiſſet. Quoniam f d dncta eſt per uerticem coni continentis conoides. in eo enim conueniunt lineæ quas Archimedes τὰς ἔγγιςα τᾶς τομᾶς, hoc eſt proximas ſectioni appellat. Apol lonius autem τὰς ἀσυμπλώτυς τῆ τομῆ, id eſt, non coeuntes cum ſectione, ut in principio diximus.*

COROLLARIVM.

Manifeſtum eſt etiam ex iam dictis, & iis, quæ nos ſupra monſtrauimus ad finem uigeſimæ quartæ huius, cuilibet portioni conoidis obtuſianguli abſciſſæ plano ſuper axem non erecto, coni portionem illam eſſe æqualem, cuiusbaſis ſit eadem, & axis cum diametris baſis æquales angulos continens, qui ad axem portionis eãdem pro portionem habeat, quam habet linea utriſque æqualis; axi portionis, & triplæ eius, quæ ad axem adiecta eſt, ad lineam utriſque æqualem; axi portionis, & lineæ, quæ ſit dupla lineæ ad axem adiectæ.



IN PROPOSITIONEM XXIX.

Latitudinem habens una parte maiorem, quàm ſit latitudo gnomonis proxime ablati.] *Codex græcus hoc loco ita currigendus eſt.* πλάτος μὲν ἔχων ἑνὶ τμάματι μεῖζον τῦ πλατέος. A

Quare & quam rectangulum b h d ad rectangulum b e d.] *Ex uigeſima prima primi conicorum.* B

Hoc enim in iis, quæ de ſpiralibus lineis edidimus, demonſtratum eſt.] *In corollario uidclicet decimæ propoſitionis.* C

COROLLARIVM.

Ex iis, quæ ſuperius demonſtrata ſunt conſtat, quodlibet ſphæroides duplum eſſe coni illius recti, qui baſim quidem habeat circulum circa ſphæroidis diametrum, axem uero axi ſphæroidis æqualem. Et inſuper cylindrum rectum, qui baſim habeat eandem dicto cono, & axem eundem, ipſius ſphæroidis eſſe ſeſquialterum.

*Is nanque cylindrus triplus eſt coni; ſphæroides autem eiuſdem coni eſt duplum, ut diximus, ex quo ſequitur cylindrum ſphæroidis ſeſquialterum eſſe.*

IN PROPOSITIONEM XXX.

Quæq; ipſa b d iungit recta linea per h tranſibit; & erunt portionum uertices b d; A

b d; axes uero b h, h d.] *Ex decima octaua huius.*

B Et portio cylindri basim habens eandem portioni, & axem eundem.] *Codex græcus ita corrigendus.* καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦ μὲν τοῦ κώνου ἡμιόλιος ἐὼν, *& reliqua, & paulo post* οὐκ ἔσται οὖν μεῖζον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ τοῦ κώνου, εἰ δὲ ἔλασσον ἐστὶν ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρου τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον.

## COROLLARIVM.

Ex iam dictis similiter manifestum est, quodlibet sphæroides duplum quoque esse coni portionis, quæ sphæroide ipso secto plano per centrum transeunte, non autem super axem erecto, basim habeat eandem portioni sphæroidis, & axem æqualem lineæ portionum sphæroidis uertices iungenti, qui cum diametris basis æquales angulos contineat. Et cylindri item portionem, quæ basim habeat eandem coni portioni iam dictæ, & axem eundem, esse etiam ipsius sphæroidis sesquialteram.

*Est enim cylindri portio, portionis coni tripla: & sphæroides duplum eiusdem. ex quibus patet propositum.*

## IN PROPOSITIONEM XXXI.

A Et quoniam b g tripla est ipsius b h: & b d item tripla ipsius b r: erit & d g ipsius h r tripla.] *Ex decima nona quinti Euclidis. nam si fuerit sicut totum ad totum, sic ablatum ad ablatum: & reliquum ad reliquum erit, sicut totum ad totum.*

B Quare proportionibus non similiter ordinatis cylindrus, cuius basis eadem portioni, & idem axis ad conum z eam proportionem habebit, quam d f ad h r.] *Ex uigesima tertia quinti, ut diximus in uigesimam septimam huius.*

C Erit ergo unaquæque n o dupla ipsius h d.] *Sit enim ipsi b d æqualis f m. quoniam h b est æqualis ipsi h f: erit & reliqua m h reliquæ h d æqualis; & propterea m d; hoc est o n dupla ipsius h d.*

D Manifestum est, omnia spatia, quorum unumquodque maximo est æquale ad alia omnia minorem habere proportionem, quàm x n ad lineam &c.] *Ex tertia huius.*

E Quare constat spatia eadem ad omnes gnomones maiorem proportionem habere, quàm x n ad lineam &c.] *Nam si à linea n x auferamus dimidiam n o, & tertiam partem x o: relinquentur dimidia n o, & duæ tertiæ ipsius x o.*

## IN PROPOSITIONEM XXXII.

A Et erunt uertices portionum coniuncti ducta linea b f.] *Et ipsam lineam b f Apollonius uocat ellipsis diametrum ex generatione. quare, quam Archimedes sphæroidis portionum uertices iungentem appellat, liceat nobis deinceps breuitatis caussa & sphæroidis axem appellare.*

## IN PROPOSITIONEM XXXIII.

A Dicta autem portio dupla est coni basim habentis ipsi eandem, & axem eundem; hæc iam demonstrata sunt.] *In uigesima nona huius.*

B At uero hic conus ad conum habentē pro basi circulum circa diametrum a c &c.] *Ex undecima huius, nam circuli inter se se eandem proportionem habent, quam quadrata diametrorum: & quam item quadrata semidiametrorum.*

C Proportio autem, quam habet quadratum k h ad quadratum e a, eadem est illi &c.] *Ex uigesima prima primi conicorum Apollonij.*

D Habebit igitur rectangulum contentum x d, b h ad rectangulum b h d eam proportionem, quam d h ad d e.] *Cum enim positum sit x d ad h d habere eam proportionem, quam d h ad d e: rectangulum uero contentum lineis x d, b h ad rectangulum b h d, ex prima sexti habeat*

*ti habeat eam, quam x d ad h d: habebit rectangulum x d, b h ad ipsum b h d eam, quam d h ad d e.*

Eam proportionem habet, quam rectangulum b e d ad rectangulum f e d; hoc est quam b e ad e f.] *Ex prima sexti Euclidis.* E

Conus igitur, qui est in dimidio sphæroide &c.] *Per æquam rationem ex uigesima secunda quinti.* F

Vtrunque enim quadruplum est.] *Ex prima sexti. nam linea f g quadrupla est lineæ b h.* G

Quare & maior portio sphæroidis ad minorem eam habet, quam excessus, quo rectangulum f g, x d, excedit rectangulum f e d.] *Per diuisam rationem ex decima septima quinti. maior enim portio sphæroidis est excessus, quo totum excedit portionem minorem.* H

Rectangulum autem f g, x d ipsum f e d excedit, rectangulo x d, e g; & rectangulo f e x.] *Nam rectangulum f g, x d; ex prima secundi elementorum, æquale est duobus rectangulis; rectangulo scilicet e g, x d, & rectangulo f e, x d. At uero rectangulum f e, x d, ex eadem, æquale est item duobus rectangulis; rectangulo uidelicet f e x; & rectangulo f e d. rectangulum igitur f g, x d æquale est tribus rectangulis; rectangulo e g, x d; rectangulo f e x; & ipsi f e d. quare rectangulum f g, x d excedit rectangulum f e d, duobus rectangulis; rectangulo scilicet e g, x d; & rectangulo f e x, ut proponebatur.* I

Quam rectangulum f e d ad rectangulum b e d; habet enim eam, quam f e ad b e.] *Corrigendus hoc loco græcus codex.* K

Et conus, qui est in minori portione, ad conum, qui in maiori eam habet, quam rectangulum b e d ad quadratum b e. nam coni altitudinum proportionem habent, cum in eadem sint basi.] *Ex decimæ quartæ undecimi Euclidis. conus enim in minori portione constitutus ad conum, qui in maiori, eam habet proportionem, quam d e ad b e. quam autem proportionem habet d e ad b e, eandem rectangulum d e b habet ad quadratum b e; ex lemmate uigesimæ secundæ decimi Euclidis. quare conus, qui in minori portione, ad conum, qui in maiori habet eam, quam rectangulum d e b ad quadratum b e.* L

Quoniam rectangulum x d, e g ad rectangulum x d e eam habet, quam e g ad e d.] *Ex prima sexti.* M

Et rectangulum f e x ad rectangulum f e h eam, quam e g ad e d. habet enim x e ad h e proportionem eandem, quam e g ad e d &c.] *Rectangulum enim f e x ad rectangulum f e h habet eam proportionem, quam x e ad h e. & quoniam est ut x d ad h d, ita h d ad d e: erit ex decima nona quinti x h ad h e, ut x d ad h d; hoc est ut h d ad d e: & coniungendo x e ad h e, ut h d & d e; hoc est ut e g ad d e. rectangulum igitur f e x ad rectangulum f e h habet eam proportionem, quam e g ad e d.* N 1. sexti.

Quoniam quadratum b h est æquale rectangulo x d e.] *Nam cum sint tres lineæ proportionales x d, h d, d e, ut dictum est; sitq; b h æqualis ipsi h d: erit quadratum b h æquale ei, quod fit ex d x, d e.* O 17. sexti.

Et excessus, quo quadratum b e excedit quadratum b h, est æqualis rectangulo f e h; quod b h, b f sunt æquales.] *Ex sexta secundi Euclidis.* P

## COROLLARIVM.

Ex hac, & trigesima prima colligitur, cuilibet portioni sphæroidis, secti plano super axem erecto, non autem per centrum transeunte, conum illum rectum esse æqualem, qui basim habeat eandem portioni, & exem, lineam habentem ad axem portionis proportionem eam, quam utraque linea; dimidia axis sphæroidis, & axis reliquæ portionis habet ad reliquæ portionis axem.

## IN PROPOSITIONEM XXXIIII.
## COROLLARIVM.

Sequitur ex hac, & 32, cuilibet portioni sphæroidis secti plano neque super axem erecto, neque centrum transeunte, coni portionem illam esse æqualem, cuius

basis eadem portioni & axis cum diametris basis æquales angulos continens, qui ad axem portionis eam proportionem habeat, quam habet utraque linea; & dimidia eius, quæ iungit uertices portionum factarum, & axis reliquæ portionis ad eundem reliquæ portionis axem.

*His igitur positis nos augendæ, amplificandæq; doctrinæ gratia, non nulla theorema, et problemata addemus à re non aliena; quorum cognitionem, neque in utilem prorsus, neque studiosis ingratam fore existimauimus.*

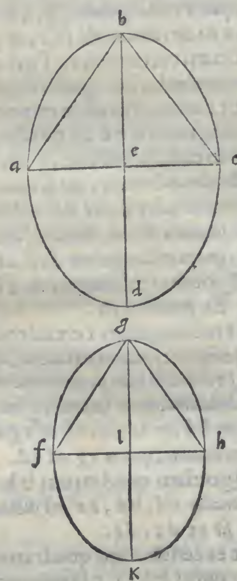
## PROPOSITIO I.

Sphæroidea similia inter se se, & portiones sphæroideon similes, & pariter conoideon, triplam eius, quæ est suorum axim proportionem habent.

*Sint sphæroidea similia; a b c d quidem, cuius axis b d, & centrum e; f g h k uero, cuius axis g k, & centrum l. Dico sphæroides a b c d ad sphæroides f g h k proportionem habere triplam eius, quæ est axis b d ad axem g k. secetur enim eorum utrunque plano per centrum ducto, & erecto super axem: & sit sectio sphæroidis a b c d, linea a c: sphæroidis autem f g h k, linea f h. erit ex uigesima nona huius portio sphæroidis a b c dupla coni, qui basim habet portioni eandem, & eundem axem; hoc est coni a b c: & similiter portio sphæroi*

15.quinti. *dis f g h dupla erit coni f g h. quare a b c portio ad portionem f g h habet eam proportionem, quam conus a b c ad conum f g h: & eorum dupla; hoc est conoides a b c d ad conoides f g h k habet eam, quam conus rectus, cuius basis a c, & axis b d, ad conum eiusmodi basim habentem f h, & axem g k. Quòd cum sphæroidea similia sint; erunt & ipsi*

12.duodc. *coni similes: & habebit conus ad conum proportionem triplam eius, quæ est diametri basis a c ad diametrum basis f h. hæc autem eadem est proportioni axis b d ad axem g k. conoides igitur a b c d ad conoides f g h k triplam proportionem habet eius, quæ est b d axis ad axem g k.*



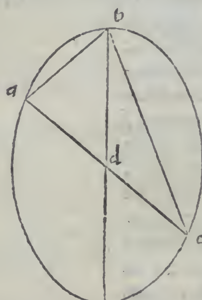

*Sint portiones sphæroideon similes; & sint primum abscissæ plano per centrum ducto, & super axem erecto; cuiusmodi sunt in priori dispotione, portiones a b c, f g h. abscinduntur enim similes portiones à figuris similibus, quod ex earum diffinitione apparet. Dico portionem a b c ad ipsam f g h proportionem habere triplam eius, quæ est axis b e ad axem g l. monstratum nanque antea est portionem a b c ad portionem f g h esse, sicut conus a b c ad conum f g h. qui coni cum similes sint: habent inter se se proportionem triplam eius, quæ est diametri basis a c ad diametrum basis f g; hoc est axis b e ad axem g l. quare & portio a b c ad portionem f g h habet proportionem triplam eius, quæ est axis b e ad axem g l.*

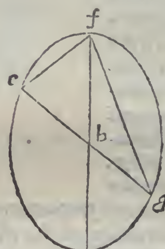
*Sint portiones sphæroideon similes, abscissæ plano per centrum quidem ducto, non autem erecto super axem; a b c, cuius axis b d; & e f g, cuius axis f h. Dico portionem sphæroidis a b c ad ipsam e f g habere proportionem triplam eius, quæ est axis b d ad axem f h. est enim portio sphæroidis a b c, ex trigesima huius, dupla portionis coni a b c: & portio sphæroidis e f g item dupla portionis coni e f g. Quare sphæroidis portio ad portionem sphæroidis est, ut coni portio ad portionem coni. sed coni portio a b c ad coni portionem e f g proportionem habet triplam eius, quæ est diametri basis a c ad diametrum basis e g, ipsi respondentem, ut nos monstrauimus ad undecimam huius, propositione 9. hæc autem eadem est proportioni axis b d ad axem f h, ex diffinitione similium coni portionum quã supra attulimus. ergo & sphæroidis portio a b c ad sphæroidis portionẽ*

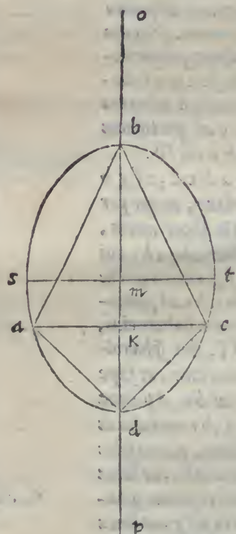
e f g

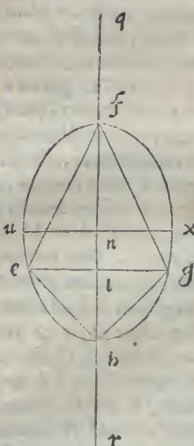
e f g proportionem habet triplam axis b d ad axem f h.

Sint rursus sphæroideon a b c d, e f g h portiones similes, abscissæ plano non per centrum ducto, sed erecto super axem, quæ sint maiores dimidio sphæroide; a b c quidem, cuius axis b k; e f g uero, cuius axis f l. Dico portionem a b c ad portionem e f g proportionem habere triplam eius, quæ est axis b k ad axem f l. Sint sphæroideon centra m n: & producantur b d, f h: & addantur utrinque lineæ æquales dimidio axis; ad ipsam quidem b d, lineæ b o, d p, æquales b m: ad ipsam uero f h ipsæ f q, h r, æquales f n. habebit iam portio sphæroidis a b c ad conum a b c proportionem eam, quam linea k p ad lineam k d, ex trigesima tertia huius: & eadem ratione portio sphæroidis e f g ad conum e f g proportionem habebit, quam linea l r ad lineam l h. Sed linea k p ad lineam k d est, ut linea l r ad lineam l h: quod sic patet. secentur sphæroidea a b c d, e f g h plano ducto per axem. fient sectiones, ellipses similes inter se se; quòd sphæroidea similia sint; & erit ellipsis a b c d diameter b d: & ipsius e f g h diameter f h. ducantur secundæ diametri s m t, u n x. quadratum igitur s m ad quadratum b m eam habet proportionem, quàm quadratum u n ad quadratum f n. ut autem quadratum s m ad quadratum b m, ita quadratum a k ad rectangulum b k d: ex uigesima prima primi conicorum; & eadem ratione, ut quadratum u n ad quadratum f n, ita quadratum e l ad rectangulum f l h. ergo quadratum a k ad rectangulum b k d eam habet proportionem, quam quadratum e l ad rectangulum f l h. sed proportio quadrati a k ad rectaugulum b k d composita est ex proportione a k ad b k, & ex proportione a k ad k d. & itidem proportio quadrati e l ad rectangulum f l h, composita est ex proportione e l ad f l, & e l ad l h. quarum proportionum, quæ est a k ad b k, eadem est proportioni e l ad f l, cum similes sint portiones. reliqua igitur proportio a k ad k d eadē est reliquæ e l ad l h. ex quo sequitur, & portionem sphæroidis a d c similem esse portioni e h g. Et quoniam b k ad a k est, ut f l ad e l: & a k ad k d, ut e l ad l h: erit ex æquali b k ad k



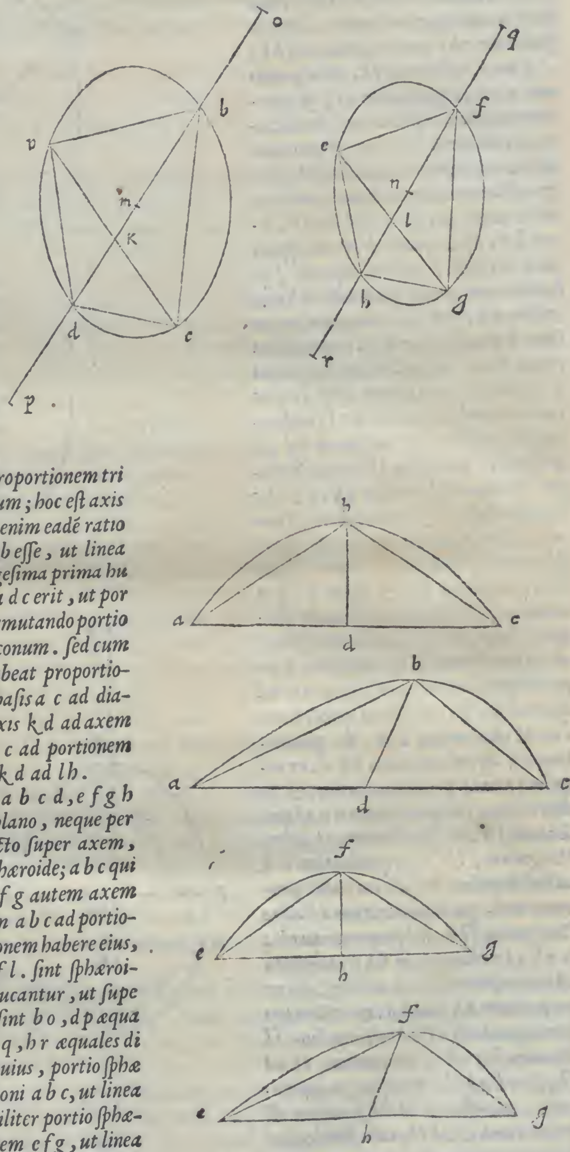








d, ut f l ad l h: & componendo b d ad k d, ut f h ad l h. est autem m d ad b d, ut n h ad f h. quare & m d; hoc est d p ad k d erit ut n h; hoc est ut h r ad l h: & rursus componendo k p ad h d, ut l r ad b h. Quare portio sphæroidis a b c ad conum a b c eandem habet proportionem, quam portio sphæroidis e f g ad conum e f g: & permutando portio ad portionem eam habet, quam conus ad conum. sed conus ad conum proportionem habet triplã eius, quæ est diametri basis a c ad diametrum basis e g: hoc est eius, quæ est axis b k ad axem f l. portio igitur a b c ad portionem e f g proportionem habet triplam eius, quæ est axis b k ad axem f l. Iisdem manentibus & portiones sphæroideon similes a d c, e h g, quæ sunt minores dimidio sphæroide, habebunt inter se proportionem triplã eius, quæ est suorum axium; hoc est axis k d ad axem l h. monstrabitur enim eadẽ ratione, lineam k o ad lineam k b esse, ut linea l q ad lineam l f. quare ex trigesima prima huius, portio a d c ad conum a d c erit, ut portio e h g ad conũ e h g: & permutando portio ad portionem, ut conus ad conum. sed cum conus ad conum triplam habeat proportionem eius, quæ est diametri basis a c ad diametrum basis e g; hoc est axis k d ad axem l h: habebit & portio a d c ad portionem e h g triplam eius, quæ est k d ad l h.



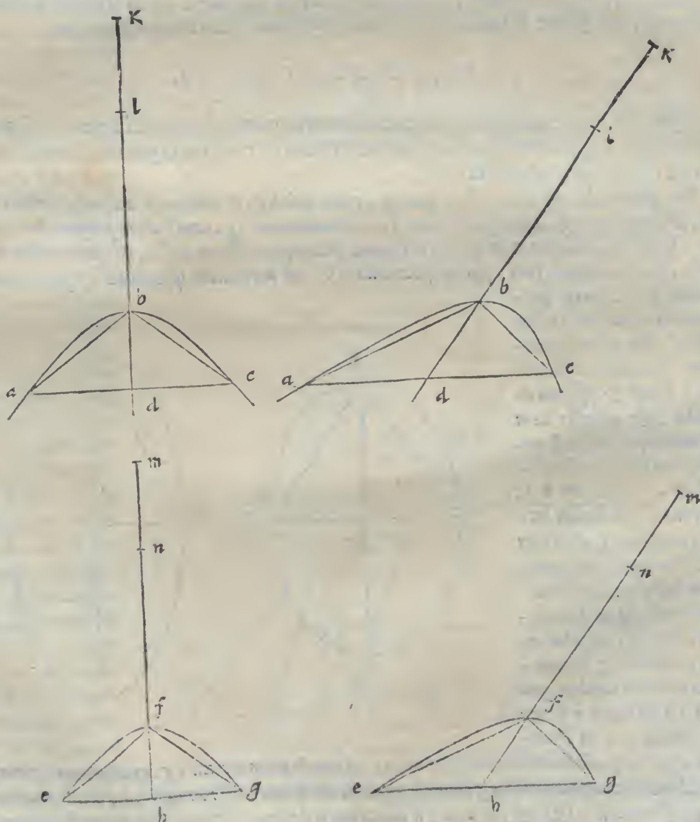

Sint denique sphæroideon a b c d, e f g h portiones similes, abscissæ plano, neque per centrum ducto, neque erecto super axem, quæ sint maiores dimidio sphæroide; a b c quidem, axem habens b k; e f g autem axem habens f l. Dico portionem a b c ad portionem e f g triplam proportionem habere eius, quæ est axis b k ad axem f l. sint sphæroideon centra m, n: & producantur, ut superius, lineæ b d, f h; ita ut sint b o, d p æquales dimidio lineæ b d: & f q, h r æquales dimidio f h. erit ex ultima huius, portio sphæroidis a b c ad portionem coni a b c, ut linea k p ad lineam k d: & similiter portio sphæroidis e f g ad coni portionem e f g, ut linea l r ad lineam l h. Sed cum linea k p ad lineam k d sit, ut linea l r ad ipsam l h; quod eodem, quo superius modo demonstrabimus;

erit portio ſphæroidis a b c ad portionem coni a b c, ut portio ſphæroidis e f g ad coni portionem e f g: & idcirco portio ſphæroidis ad ſphæroidis portionem, ut coni portio ad coni portionem. portionis autem coni ad coni portionem proportio tripla eſt eius, quæ eſt axis ad axem. ergo & portionis ſphæroidis a b c ad portionem ſphæroidis e f g proportio tripla eſt eius, quæ axis b k ad axem f l.

Et ſimiliter demonſtrabimus portiones ſphæroideon ſimiles a d c, e h g minores dimidio ſphæroide proportionem habere triplam eius, quæ eſt ſuorum axium k d, l h. quæ omnia demonſtraſſe oportebat.

Sint portiones conoideon rectangulorum ſimiles, ſiue abſciſſæ plano ſuper axem erecto, ſiue non erecto; a b c, cuius axis b d; & e f g, cuius axis f h. Dico portionem a b c ad portionem e f g proportionem habere triplam eius, quæ eſt b d ad f h. Erit nanque ex uigeſima tertia, & uigeſima quarta huius, portio conoidis a b c ſeſquialtera coni, ſeu portionis coni a b c: & portio conoidis e f g item ſeſquialtera coni, ſeu coni portionis e f g. quare portio conoidis ad conoidis portionem eam proportionem habet, quam conus ad conum, ſeu coni portio ad coni portionem; & proptera triplam habet eius, quæ eſt axis b d ad axem f h.

Sint rurſus portiones conoideon obtuſiangulorum ſimiles, uel abſciſſæ plano ſuper axem erecto, uel non erecto; a b c quidem, cuius axis b d; e f g uero, cuius axis f h. Dico portionem a b c ad portionem e f g proportionem habere triplam eius, quæ eſt b d ad f h. adijciatur ad lineam b d productam, linea b k, quæ ſit æqualis triplæ lineæ ad axem adiectæ: ſit autem b l æqualis duplæ eiuſdē: & ad lineam f h adijciatur linea f m, æqualis triplæ lineæ ad axem adiectæ: & ſit f n, æqualis du-

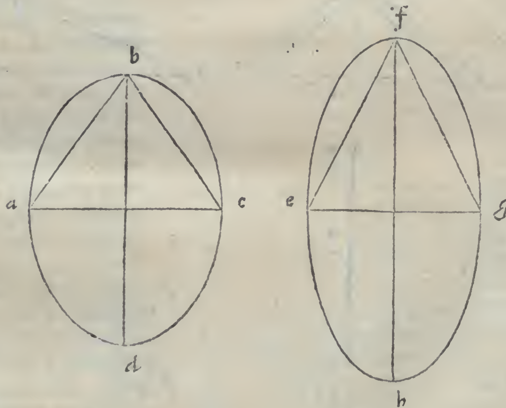


plæ eiuſdem. habebit ex uigeſima ſeptima, & uigeſima octaua huius, portio conoidis a b c ad conum, ſeu portionem coni a b c eam proportionem, quam habet linea k d ad lineam l d. & ſimiliter portio conoidis e f g ad conum, ſeu coni portionem e f g habebit eam, quam linea m h ad lineam n h. ſed k d ad l d habet eandem, quam m h ad n h, ob ſimilitudinem portionum, ut monſtrabitur. ſecentur enim conoidea plano per axem ducto. erunt ſectiones, hyperbolarum portiones ſimiles, à ſimilibus hyperbolis abſciſſæ. & quoniam ſimilium hyperbolarum latera figuræ eandem habent inter ſe proportionem: eſtq; quadratum a d ad rectangulum b d l, ut figuræ rectum latus ad tranſuerſum, ex uigeſima prima primi conicorum: & ita quadratum e h ad rectangulum f h n, ut figuræ rectum latus ad tranſuerſum: habebit quadratum a d ad rectangulum b d l eandem proportionem, quam quadratum e h ad rectangulum f h n. Sed quadrati a d ad rectangulum b d l proportio compoſita eſt ex proportione a d ad b d, & ex proportione a d ad d l: & ſimiliter proportio quadrati e h ad rectangulum f h n compoſita eſt ex proportione e h ad f h; & e h ad h n. quarum proportionum ea, quæ eſt a d ad b d, eadem eſt proportioni e h ad f h; quòd portiones ſimiles ſint. reliqua igitur a d ad d l, eadem eſt reliquæ e h ad h n. at b d ad a d habet eandem proportionem, quam f h ad e h. quare ex æquali b d ad d l proportionem habet eam, quam f h ad h n: & conuertendo d l ad b d, quam h n ad f h: & denique diuidendo l b ad b d, quam n f ad f h. eſt autem k l ad l b, ut m n ad n f; utraque enim utriuſque dimidia eſt: & b d ad d l, ut f h ad h n. ergo ex æquali k l ad l d eſt, ut m n ad n h: & componendo k d ad l d, ut m h ad n h. Portio igitur conoidis a b c ad conum, ſeu ad portionem coni a b c eandem habet proportionem, quam portio conoidis e f g ad conum, ſeu coni portionem e f g: & permutando portio conoidis ad portionem conoidis, quam conus ad conum, ſeu portio coni ad coni portionem: & ob id proportionem habet triplam eius, quæ eſt axis b d ad axem f h: quod propoſitum fuerat demonſtrandum.

## PROPOSITIO II.

Sphæroideon æqualium quadrata diametrorum ex contraria parte reſpondent ipſis axibus, & quorum quadrata diametrorum ex contraria parte reſpondent ipſis axibus, ſphæroidea æqualia ſunt.

*Sint ſphæroidea æqualia; a b c d quidem, cuius axis b d, & diameter a c; e f g h uero, cuius axis f h, & diameter e g. Dico quadratum a c ad quadratum e g, eam habere proportionem, quam habet f h ad b d. Secetur enim eorum utrunque plano per centrum ducto, & ſuper axem erecto. erit ex iis, quæ monſtrata ſunt, portio ſphæroidis a b c ad portionem ſphæroidis e f g, ut conus a b c ad conum e f g. quare portionibus æqualibus exiſtentibus (ſunt enim æqualium ſphæroideon dimidiæ) erunt & ipſi coni æquales: & æquales item eorum dupli; hoc eſt conus, qui baſim habet circulum a c, & axem b d, & conus, qui baſim habet circulum e g, & axem*




15.duode. *f h. Sed conorum æqualium baſes ex contraria parte reſpondent ſuis axibus; hoc eſt, circulus a c ad circulum e g proportionem habet eandem, quã axis f h ad axem b d: & ut circulus a c ad circu-*
2.duodec. *lum e g, ita quadratum diametri circuli a c ad quadratum circuli e g. quadratum igitur diametri a c ad quadratum diametri e g; hoc eſt quadratum diametri ſphæroidis a b c d ad quadratum diametri ſphæroidis e f g h eſt, ut axis f h ad axem b d: quod primum fuit demonſtrandum. Sed iam*

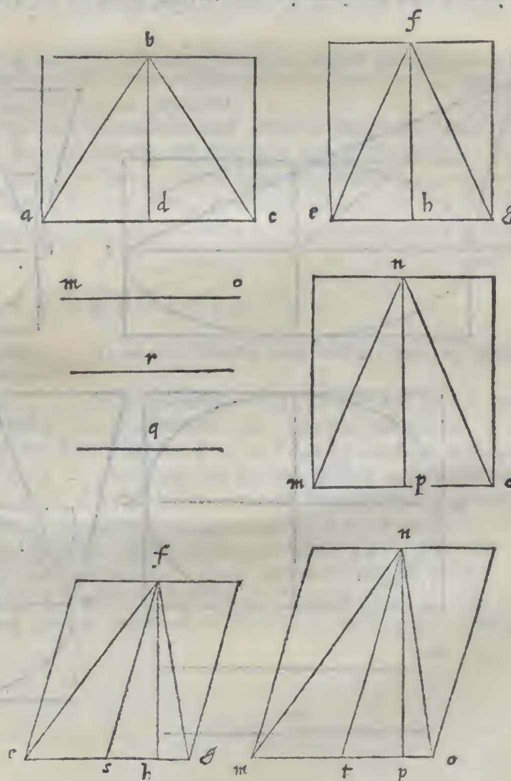
ipſorum

ipsorum sphæroideon a b c d, e f g h quadrata diametrorum ex contraria parte respondeant ipsis axibus, ut sit quadratum diametri a c ad quadratum diametri e g sicut axis f h ad axem b d. Dico sphæroidea a b c d, e f g h æqualia esse. Iisdem nanque manentibus, quoniam ut quadratum diametri a c ad quadratum diametri e g, ita circulus a c ad circulum e g: erit circulus a c ad circulum e g, ut axis f h ad axem b d. quare conus, cuius quidem basis est circulus a c; axis autem b d, est æqualis cono, cuius basis circulus e g, & axis f h: & eorum subdupli, hoc est conus a b c est æqualis cono e f g. sed ut conus a b c ad conum e f g, ita portio sphæroidis a b c ad portionem sphæroidis e f g. ergo & portio sphæroidis a b c est æqualis portioni sphæroidis e f g: & propterea sphæroides a b c d æquale sphæroidi e f g h: quod secundo loco demonstrandum fuerat.

## PROPOSITIO III.

Datis duobus conis, siue cylindris quibuscunque, tertium constituere conum, siue cylindrum, qui sit alteri eorum æqualis, alteri uero similis.

*Sint prius dati coni a b c, e f g, siue recti utrique, siue scaleni, siue alter rectus, alter scalenus; a b c quidem, cuius basis sit circulus circa diametrum a c, & altitudo b d; e f g uero cuius basis circulus circa diametrum e g, altitudo f h: & oporteat conum constituere cono a b c æqualem, & similem ipsi e f g. fiat sicut f h ad e g, sic b d ad q: & inter duas rectas lineas a c, & q duæ mediæ proportionales sumãtur, m o, & r: ita ut sit, sicut a c ad m o, ita m o ad r, & r ad q: & supra circulum, cuius diameter sit linea m o, fiat conus m n o, similis cono e f g, cuius altitudo n p. Dico eum æqualem esse cono a b c. est enim ut f h ad e g, ita n p ad m o: quod in rectis conis est manifestum, ex eorum diffinitione; in his enim f h & n p axes sunt: in scalenis autem monstrabitur hoc pacto. per lineam f h, & axem coni e f g, qui sit f s, ducatur planum secans conum, quod faciat sectionem triangulum f h s: & eodem modo per lineam n p, & lineam n t, axem coni m n o ducatur aliud planũ secans conum, quod faciat sectionem triangulum n p t. erit triangulum n p t æquiangulum triangulo f h s. nanque angulus n t p est æqualis angulo f s h, ex diffinitione conorum scalenorum similium: & angulus n p t est æqualis angulo f h s; cum uterque sit rectus. reliquus igitur angulus reliquo angulo est æqualis: & totum triangulum toti*

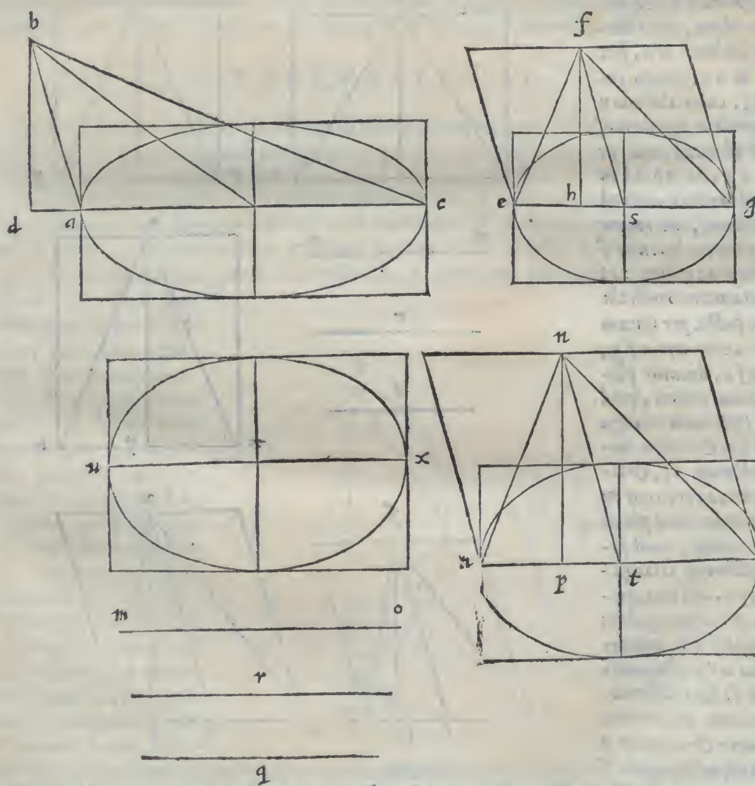


toti triangulo æquiangulum, quare ut f h ad f s, ita n p ad n t. ut autem f s ad e g, ita n t ad m o, ex diffinitione eadem, & permutata ratione. ergo ex æquali ut f h ad e g; hoc est ut b d ad q, ita n p ad m o; & permutando, conuertendoq; ut n p ad b d, ita m o ad q. Itaque cum quatuor lineæ proportionales sint a c, m o, r, q; erit sicut quadratum a c ad quadratum m o, ita m o ad q. sicut autem m o ad q, ita n p ad b d. sicut igitur quadratum a c ad quadratum m o; hoc est sicut circulus circa diametrum a c ad circulum circa diametrum m o, ita n p ad b d. quare ex decima quinta duodecimi elementorum, & ex ijs, quæ à nobis demonstrata sunt ad undecimam huius, propositione decima, conus m n o est æqualis cono a b c, & similis ipsi e f g: quod fecisse oportebat. Et cum sit cylindrus ad cylindrum, sicut conus ad conum: eodem faciemus modo, si sint dati cylindri a b c, e f g: & oporteat cylindro quidem a b c æqualem, ipsi uero e f g similem constituere cylindrum.

## PROPOSITIO IIII.

Datis duabus coni, aut cylindri portionibus, tertiam constituere coni, aut cylindri portionem, quæ alteri earum sit æqualis, alteri similis.

*Sint datæ coni portiones; a b c quidem basim habens spatium contentum ellipsi a c, cuius maior diameter sit a c recta linea, & altitudo b d; e f g uero basim habens spatium, e g ellipsi contentum, cuius diameter maior sit recta linea e g, & altitudo f h: oporteatq; aliam coni portionem inuenire, quæ sit æqualis portioni a b c, & similis ipsi e f g. constituatur ex diametris ellipsis*



*ellipsis a c rectangulum a c: & eodem modo ex diametris ellipsis e g constituatur aliud rectangulum e g: & ex uigesima quinta sexti elementorum constituatur tertium rectangulum u x, æquale ipsi a c rectangulo, & simile ipsi e g: in quo describatur ellipsis u x, cuius maior diameter recta linea u x. erit & ellipsis u x, similis ellipsi e g: & ex septima huius, spatium ellipsi u x contentum, æquale spatio contento ellipsi a c. fiat ut f h ad e g, sic b d ad q: & inter duas rectas lineas u x, q inueniantur duæ mediæ proportionales m o, & r: intelligaturq; coni portio m n o similis coni portioni e f g, basim habens spatium ellipsi contentum, cuius maior diameter sit m o, & altitudo n p. Dico coni portionem m n o eam esse, quam quærimus. ducatur enim planum secans coni portionem e f g, transiensq; per lineam f h, & eius axem f p; quod faciat sectionem triangulum f h s: & similiter per lineam n p, & axem portionis coni m n o, qui sit n t, ducatur aliud planum eam secans, faciensq; sectionem triangulum n p t. erit triangulum n p t æquiangulum triangulo f h s, ex diffinitione coni portionum similium, quam nos in principio huius attulimus; & eadem ratione, qua usi sumus in antecedenti, erit ut f h ad e g, ita n p ad m o: & tandem, ut quadratum u x ad quadratum m o, ita n p ad b d. ut autem quadratum u x ad quadratum m o, ita spatium ellipsi u x comprehensum ad spatium comprehensum ellipsi m o, ex corollario septimæ huius. sed spatium ellipsi u x comprehensum est æquale spatio comprehenso ellipsi a c, ut monstratum est. ergo ut basis portionis coni a b c ad basim portionis coni m n o, ita n p ad b d. quarum autem coni portionum bases ex contraria parte respondent suis altitudinibus, hæ inter se sunt æquales, ut monstratum est ad undecimam huius propositione decima. Aequalis est igitur coni portio m n o coni portioni a b c, & similis ipsi e f g: quod fecisse oportebat. Et idem sequetur, si sint datæ cylindri portiones a b c, e f g. nanque erit cylindri portio m n o æqualis a b c portioni, & similis portioni e f g.*

Quòd si dato cono, & data coni portione, oporteat conum constituere, æqualē datæ coni portioni, & similem dato cono, uel constituere coni portionem æqualem dato cono, similem uero datæ coni portioni.

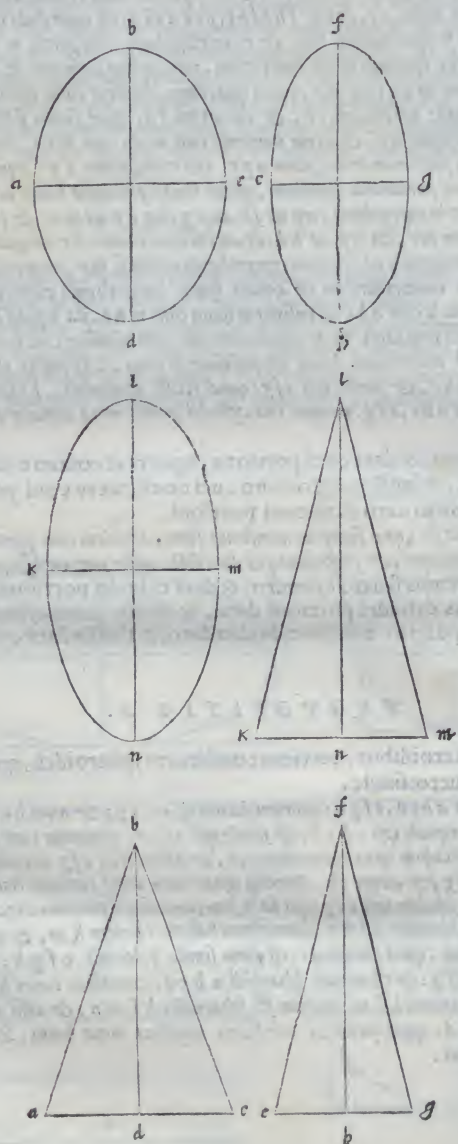
*Conum inueniemus ex ijs, quæ superius monstrata sunt, æqualem coni portioni datæ, uel coni portionem æqualem dato cono, & propositum ex ante dictis nullo negocio assequemur.*

Neque aliter faciemus si dato cylindro, & data cylindri portione, constituendus sit cylindrus, æqualis cylindri portioni datæ, & similis dato cylindro, uel constituenda sit cylindri portio, æqualis cylindro dato, & similis datæ cylindri portioni.

## PROPOSITIO V.

Datis duobus sphæroidibus, tertium constituere sphæroides, quod sit alteri eorum æquale, alteri uero simile.

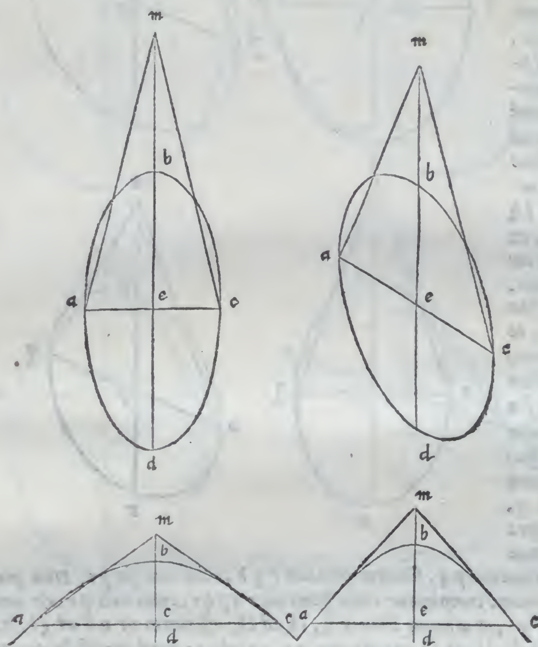
*Sint data sphæroidea a b c d, e f g h: quorum diametri a c, c g; & axes b d, f h: & oporteat constituere sphæroides, æquale ipsi a b c d, & simile ipsi e f g h. ponantur coni a b c, e f g; a b c quidem basim habens circulum circa diametrum a c, & axem b d; e f g uero basim habens circulum circa diametrum e g, & axem f h. Duobus igitur datis conis tertium constituemus conum; æqualem ipsi a b c, & similem ipsi e f g: qui sit k l m, cuius basis circulus circa diametrum k m, & axis l n. ponatur sphæroides k l m n, diametrum habens eandem k m, & axem l n. Dico k l n m sphæroides esse illud, quod quærimus. est enim simile sphæroidi e f g h; cum conus k l m factus sit similis cono e f g: & est æquale sphæroidi a b c d: cum idem conus k l m factus sit æqualis cono a b c. coni autem k l m duplum sit sphæroides k l m n, & coni a b c item sit duplum sphæroides a b c d: quod patet ex corollario uigesimæ nonæ huius. Quare factum iam est, quod fecisse oportuit.*

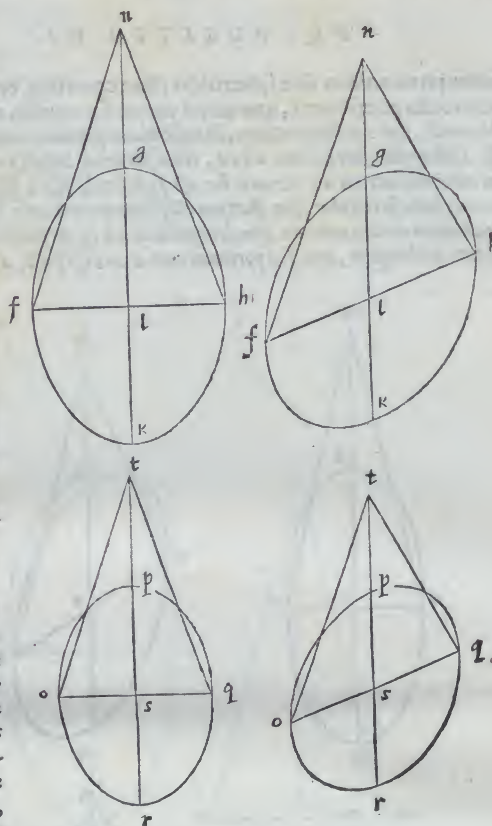

b
f
a
e c
g
d
h
l
l
k
m
n
k
n
m
b
f
a
d
c e
b
g

## PROPOSITIO VI.

Datis duabus portionibus siue sphæroidis, siue conoidis, tertiam inuenire sphæroidis, siue conoidis portionem, quæ alteri earum sit æqualis, alteri uero similis.

*Sint datæ sphæroidis, siue conoidis portiones, abscissæ plano quomodocunque ducto a b c, f g h: et sit a b c abscissa à sphæroide, siue conoide a b c d, cuius portionis basis sit circulus, siue spatium ellipsi contentum circa diametrum a c, & axis b e: & f g h sit abscissa à sphæroide, uel conoide f g h k, cuius portionis basis sit circulus, siue spatium ellipsi contentum circa f h diametrum, et axis g l: oporteat autem portionem inuenire æqualem portioni a b c, & similem ipsi f g h. Constituantur ex ijs, quæ ante tradita sunt, coni, seu portiones coni a m c, & f n h; a m c quidem æqualis portioni a b c, basim habens eadem ipsi; f n h uero æqualis portioni f g h, & ipsi eandem habens basim. Sitq; primum f g h portio, cui oportcat similem constituere, sphæroidis portio, abscissa plano per centrum ducto, uel erecto super axem, uel non erecto. erit f n h conus, siue coni portio basim habens circulum, uel spatium contentum ellipsi circa diametrum fh, & axem n l, qui sit æqualis axi sphæroidis g k, ex corollario uigesimæ nonæ, & trigesimæ huius. Itaque dato cono, siue coni portioni a m c, æqualem conum constituemus, siue coni portionem, similem ipsi f n h: & sit o t q, cuius basis circulus, uel spatium ellipsi contentum circa diametrum o q, et axis t s: & supra eandem basim intelligatur constituta sphæroidis portio o p q, similis portioni f g h, cuius axis sit p s. Dico portionem o p q esse eam, quam uolumus. Compleatur enim sphædoides: & sit o p q r, cuius axis p r, & centrum s. erit ut n l ad f h, ita t s ad o q: ut autem f h ad g k, ita o q ad p r. quare ex æquali, ut n l ad g k, ita t s ad p r: & sunt æquales n l, g k. ergo æquales quoque sunt t s, p r: & propterea portio o p q æqualis est cono, seu portioni coni o t q; hoc*



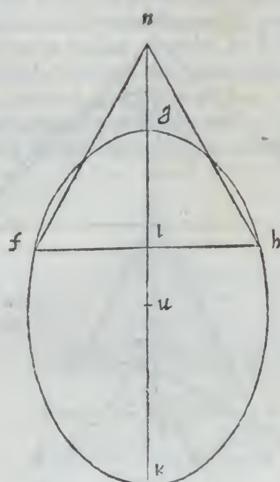


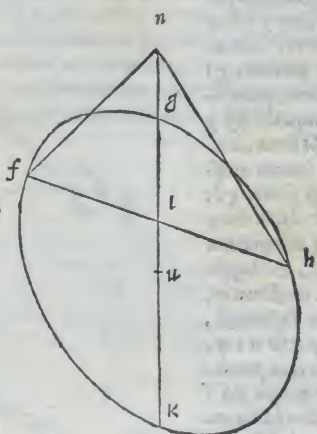

est ipsi a m c, cui erat æqualis portio sphæroidis a b c. æqualis est igitur portio o p q portioni a b c, & similis ipsi f g h.

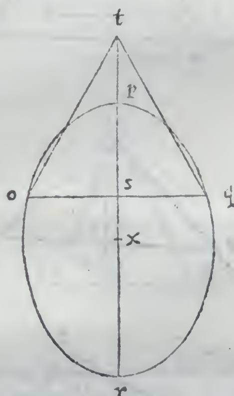
Sit f g h portio sphæroidis abscissa plano non per centrum ducto, sed erecto super axem, uel non erecto: sit autem u centrum sphæroidis f g h k, erit conus f n h, siue coni portio, cuius basis circulus, siue spatium ellipsi contentum circa diametrũ f h, & axis n l; qui ad ipsam g l eam habeat proportionem, quam utraque linea u k, l k habet ad ipsam l k, ex corollario trigesimæ tertiæ, & ultimæ huius. Rursus dato cono, siue coni portioni a m c, conum, siue portionem coni æqualem constituemus, similem ipsi f n h: & sit o t q, cuius basis circulus, uel spatium ellipsi contentum circa diametrum o q, & axis t s: & supra eandem basim constituemus sphæroidis portionem o p q, similem portioni f g h, cuius axis sit p s. Dico portionem eam esse quæsitam portionem. compleatur enim sphæroides o p q r, cuius axis p r, & centrum x. Et quoniam est n l ad g l, ut utraque linea u k, l k ad l k: est autem ut n l ad g l, ita t s ad p s: & ut utraque linea u k, l k ad l k, ita utraque x r, s r ad s r: quod manifeste patet ex ijs, quæ supra ostendimus, ob similitudinem portionum f g h, o p q: erit t s ad p s, ut utraque x r, s r ad s r: & eadem ratione portio o p q æqualis cono, seu coni portioni o t q; hoc est ipsi sphæroidis portioni a b c, & similis ipsi f g h.

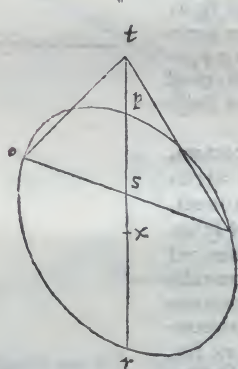
Sed sit f g h portio conoidis rectanguli, abscissa plano super axem erecto, uel non erecto. erit f n h conus, siue coni portio, cuius basis, circulus, siue spatium contentum ellipsi circa diametrum f h, & axis n l; qui ad axem portionis g l proportionem habeat sesquialteram, ex corollario uigesimæ tertiæ, & uigesimæ quartæ huius. Constituatur igitur conus, siue coni portio o t q, æqualis cono, siue coni portioni a m c, similis uero ipsi f n h: & sit eius basis circulus, uel spatium contentum ellipsi circa diametrum o q, & axis t s: deinde supra eandem basim constituatur conoidis rectanguli portio o p q, similis ipsi f g h, cuius axis sit p s. Dico portionem o p q esse æqualem portioni a b c. est enim ut n l ad f h, ita t s ad o q: & ut f h ad g l, ita o q ad p s. quare ut n l ad g l, ita t s ad p s. sed n l sesquialtera est ipsius g l. ergo & t s erit ipsius p s sesquialtera: & portio conoidis rectanguli o p q æqualis ipsi o t q; hoc est ipsi a b c, & similis ipsi f g h.

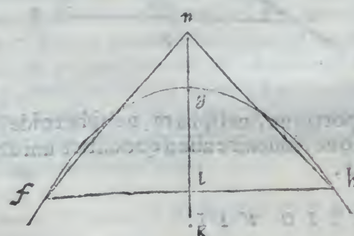
Sit

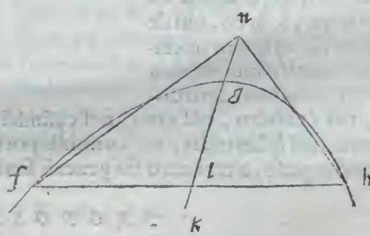

n
g
f
l
h
u
k

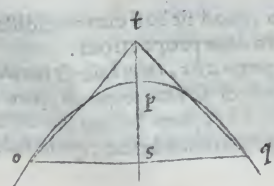

n
g
f
l
h
u
k

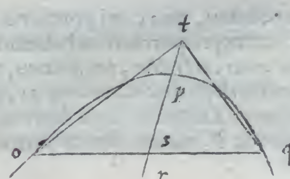

t
p
o
s
q
x
r


t
p
o
s
x
q
r

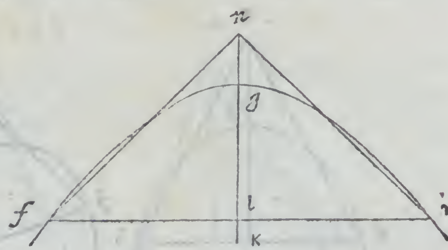

n
g
f
l
h
k

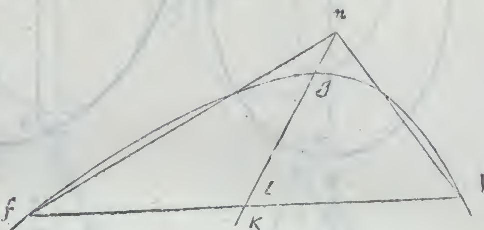

n
g
f
l
h
k

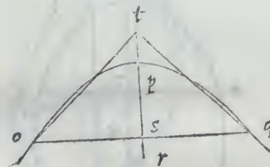

t
p
o
s
q

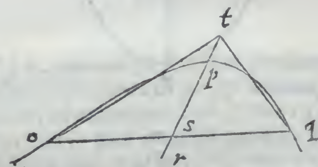

t
p
o
s
q
r

*Sit denique portio f g h conoidis obtusianguli, abscissa plano, ut dictum est. erit f n h conus, siue coni portio, cuius axis n l ad axem portionis g l proportionem habeat, quam utraque linea; & æqualis ipsi g l; & quæ tripla sit lineæ ad axem adiectæ, ad lineam utrisque æqualem; ipsi scilicet g l; & lineæ, quæ sit dupla lineæ ad axem adiectæ; ex corollario uigesimæ septimæ, & uigesimæ octauæ huius. constituatur, ut superius quoque factum est, conus, siue coni portio o t q, æqualis cono, siue coni portioni a m c, similis tamen ipsi f n h: & supra eandem basim constituatur conoidis obtusianguli portio o p q, similis ipsi f g h. monstrabitur similiter portio conoidis obtusianguli o p q, æqualis ipsi a b c portioni; & est similis ipsi f g h: quod fecisse oportebat.*




Et cum coni ad conum, uel cylindrum, uel ad coni, uel cylindri portionem, uel ad sphæram, uel sphæroides, uel ad sphæræ, uel sphæroidis, uel conoidis portionem, & horum omnium inter se se proportio data sit, tum ex iis, quæ ab Euclide in elementis tradita sunt, tum ab Archimede ipso, & in hoc eodem libro, & in eo, qui de sphæra, & cylindro inscribitur; manifestum est, quo modo possimus, dato cono, uel cylindro, uel coni, uel cylindri portione, uel sphæra, uel sphæroide, uel sphæræ, uel sphæroidis, uel conoidis portione, inuenire aliud quodlibet uni alicui eorum æquale, alteri uero sui generis simile.

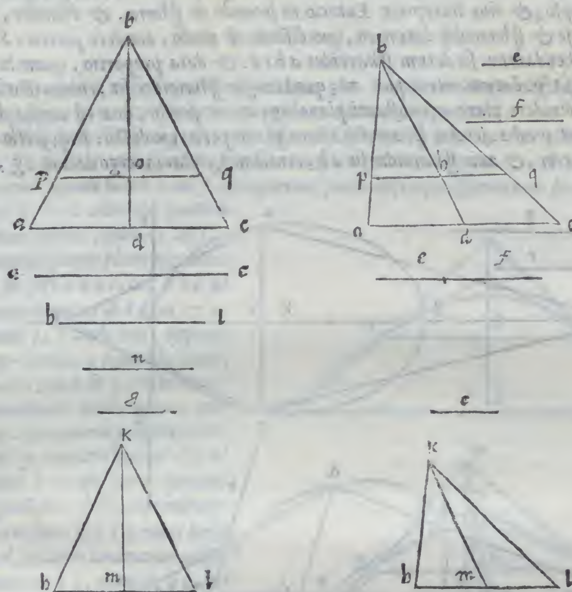
## PROPOSITIO VII.

Datum conum, siue coni portionem plano, quod sit basi eius æquidistans, sic secare, ut partes proportionem habeant eandem datæ proportioni.

*Sit datus conus, uel rectus, uel scalenus; uel coni portio a b c, cuius basis sit circulus, uel spatium contentum ellipsi circa diametrum a c, & axis b d: & sit data proportio, quam habet e ad f: oporteat autem à dato cono, uel à data coni portione a b c, plano basi eius æquidistanti partem abscindere uersus b, quæ ad reliquam partem, eam proportionem habeat, quam habet e ad f.*

Secetur

*Secetur a b c plano per axem ducto: & sit sectio a b c, triangulum: fiatq; ut utraque linea e, f ad e, ita a c ad aliam lineam, quæ sit g: & inter a c, & g sumantur duæ mediæ proportionales h l, & n: ut sit sicut a c ad h l, ita h l ad n, & n ad g. Itaque constituatur conus, siue coni portio h k l, similis ipsi a b c, cuius basis sit circulus, uel spatium contentum ellipsi circa diametrum h l, & axis k m. erit a b c ad h k l, ut linea a c ad lineam g, ex duodecima duodecimi elementorum, & ex ijs quæ monstrauimus ad undecimam huius, propositione nona. nam proportio a c ad g est tripla eius, quæ est a c ad h l. abscindatur à linea b d linea b o æqualis ipsi k m:*



*& per o ducatur planum secans a b c, æquidistansq; eius basi, quod faciat sectionem p q. Dico a b c secari eo plano, ut oportebat. est enim p b q, uel conus, uel coni portio similis ipsi a b c, ut monstratum est à nobis in principio huius; cuius quidem basis circulus, uel spatium ellipsi contentum circa diametrum p q, & axis b o. quare & similis est ipsi h k l. est igitur ut k m ad h l, ita b o ad p q: & permutando ut k m ad b o, ita h l ad p q. sed cum sit æqualis b o ipsi k m: æqualis erit & p q ipsi h l: & p b q æqualis ipsi h k l. ergo a b c ad p q b est ut linea a c ad lineam g; hoc est, ut utraque linea e, f ad e: & diuidendo excessus, quo a b c excedit p b q; hoc est a p q c ad p b q, ut f ad e: & demum conuertendo p b q ad a p q c, ut e ad f. constat igitur a b c secari plano æquidistanti eius basi, & esse partem abscissam uersus b, ad reliquam partem, ut e ad f: quod fecisse oportebat.*

## PROPOSITIO VIII.

Datum cylindrum, seu cylindri portionem plano, quod sit eis, quæ ex opposito planis æquidistans ita secare, ut partes proportionem habeant eandem datæ proportioni.

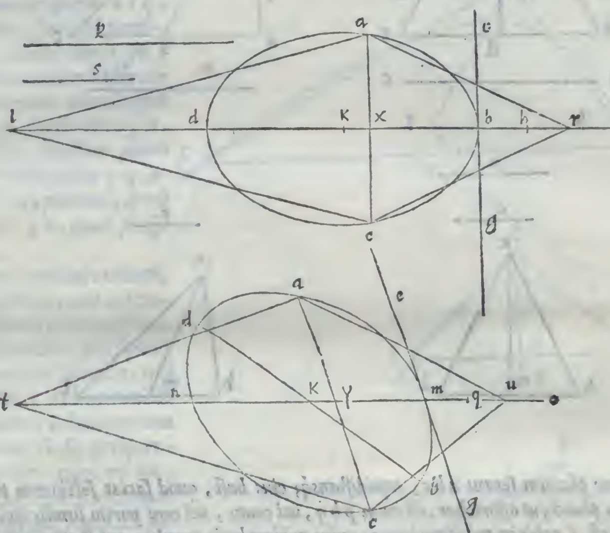
*Hoc facile factu est. si enim axem secabimus in partes datam habentes proportionem: & per puncta sectionum plana ducemus, planis ex opposito æquidistantia: & cylindrum item, uel portionem cylindri secundum datam proportionem secabimus. monstratum nanque superius est ad un-*

decimam huius, propositione tertia, si cylindrus, uel portio cylindri plano secetur æquidistanti eis, quæ ex opposito planis, esse cylindrum, ad cylindrum, seu portionem ad portionem, ut axis ad axem.

## PROPOSITIO IX.

Datum sphæroides plano, quod sit alteri dato plano æquidistans sic secare, ut partes proportionem habeant eandem datæ proportioni.

*Qui sphæram nouit diuidere in partes datam habentes proportionem, ex ijs, quæ scripta sunt ab Archimede ipso, & eius interprete Eutocio in secundo de sphæra, & cylindro, propositione quarta, idem ipse & sphæroides datum eo, quo dictum est modo, diuidere poterit. Sed ut omnia manifeste deprehendantur: sit datum sphæroides a b c d: & data proportio, quam habet p ad s, quarum maior sit p: datum autem planum, quod tangat sphæroides sit, cuius recta linea e g: & oporteat ipsum diuidere plano æquidistanti plano e g; ita ut portio, quæ est uersus d ad alteram portionem sit, ut p ad s. secetur sphæroides altero plano per axem ducto: sitq; sectio a b c d, ellipsis, cuius diameter, & axis sphæroidis sit d b, centrum k. planum ergo datum e g, uel tangit ip*




*sum sphæroides in alterutro punctorum terminantium axem; hoc est in b uel d, uel alibi. tangat primum in b. perspicuum iam est, ipsum erectum esse super axem b d. ponatur autem b f æqualis ipsi k b: & diuidatur in puncto h; ita ut sit f h ad h b, sicut p ad s. diuidatur etiam b d in x, ut sit x f ad f h, sicut quadratum b d ad quadratum d x. Id uero quomodo fieri possit, docuit Eutocius in eum Archimedis locum scribens. Demum per x ducatur planum æquidistans plano e g, quod item erectum erit super b d axem, & sit eius recta linea a x c. Dico planum illud secare sphæroides, ut oportebat; hoc est portionem a d c ad portionem a b c, esse sicut p ad s. fiat enim sicut utraque linea k b, b x ad b x, sic l x ad d x: sicut autem utraque k d, d x ad d x, sic r x ad b x: & iungantur a l, l c, a r, r c. erit l x ad x r; hoc est conus a l c ad a r c conum, ut p ad s: quod eodem in loco monstrauit Archimedes. Sed conus a l c æqualis est portioni sphæroidis a d c; & a r c conus æqualis portioni eiusdem a b c, ex corollario trigesimæ tertiæ huius. portio igitur sphæroidis a d c ad portionem a b c erit, ut p ad s. Si uero e g planum datum tangat sphæroides in alio quouis puncto, ut in m; ducatur k m linea, & utrinque producatur, quæ sit n k m, secans ellipsim ex altera parte in n: ipsi autem k m ponatur æqualis m o: & rursus diuidatur m o in q, ut sit o q ad q m, sicut p ad s: & diuidatur item m n in y, ut y o ad o q sit, sicut quadratum m*

n ad

*n ad quadratum m n y: & per y ducatur planum æquidistans plano e m s, cuius recta linea a y c. Dico planum illud diuidere sphæroides secundum proportionem datam; hoc est portionem a n c ad portionem a m c esse, ut p ad s. fiat enim sicut utraque linea k m, m y ad m y, sic t y ad n y: sicut autem utraque k n, n y ad n y, sic u y ad m y: & iungantur a t, t c, a u, u c. erit eadem ratione t y ad y u; hoc est coni portio a t c ad coni portionem a u c, ut p ad s. sed coni portio a t c est æqualis portioni sphæroidis a n c: & coni portio a u c æqualis portioni sphæroidis a m c, ex corollario ultimæ huius. portio igitur sphæroidis a n c ad portionem a m c est, ut p ad s: quod fecisse oportebat.*

## PROPOSITIO X.

Datam conoidis rectanguli portionem plano basi eius æquidistanti ita diuidere, ut partes proportionem habeant eandem datæ proportioni.

*Sit data conoidis rectanguli portio a b c, siue abscissa plano super axem erecto, siue non erecto; cuius basis sit circulus, uel spatium ellipsi contentum circa diametrum a c, & axis b d: sit autem data proportio, quam habet e ad f: & oporteat plano basi æquidistanti eam sic diuidere, ut pars, quæ est uersus b ad alteram partem proportionem habeat, quam e ad f. Secetur conoidis portio plano per axem ducto: & sit sectio a b c. erit a b c parabole, cuius diameter b d. fiat ex utrisque lineis e, f linea una, atque inter hanc & lineam e sumatur media proportionalis, quæ sit g. habebit e f ad e proportionem duplam eius, quæ est e f ad g. quam uero proportionem habet e f ad g, eandem habeat d b ad partem ipsius b h: & per h ducatur planum æquidistans basi, abscindensq; conoidis portionem k b l; cuius basis circulus, uel spatium contentum ellipsi circa diametrum k l, & axis b h. Dico conoidis portionem a b c sectam esse plano, ut oportebat. producatur enim d b usque ad m; ita ut sit d m sesquialtera ipsius d b: atque d linea b m. abscindatur b n, ut sit b n item sesquialtera ipsius h b. Intelligatur autem conus, siue coni portio a m c, cuius basis eadem, quæ portionis conoidis a b c, & axis d m: & similiter intelligatur conus, siue coni portio k n l, cuius basis eadem, quæ portionis conoidis k b l, & axis h n: sitq; m o altitudo coni portionis a m c: & n p altitudo portionis k n l. erit iam ex corollario uigesimæ tertiæ & uigesimæ quartæ huius conus, siue coni portio a m c, æqualis conoidis portioni a b c: & conus, siue coni portio k n l, æqualis portioni conoidis k b l. Itaque cum sit, ut e f ad g, ita d b ad b h: ut autem d b ad b h, ita quadratum a d ad quadratum k h, ex uigesima primi conicorum; & ut*

10. diff. quinti.



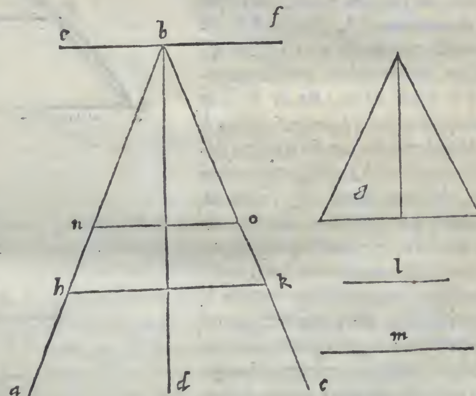
q quadratum

15. quinti 2. duodec. *quadratum a d ad quadratum k h, ita quadratum a c ad quadratum k l; hoc est circulus circa diametrum a c ad circulum circa diametrum k l, uel spatium ellipsi contentum circa diametrum a c ad spatium contentum ellipsi circa diametrum k l, ex corollario septimæ huius: sunt enim hæ sectiones similes; cum plana sint æquidistantia: quod patet ex corollario decimæ quintæ. erit ut e f ad g, ita circulus circa diametrum a c ad circulum circa diametrum k l, uel spatium ellipsi circa diametrum a c contentum ad spatium contentum ellipsi circa diametrum k l; hoc est basis coni, uel coni portionis a m c ad basim coni, uel portionis coni k n l. Rursus cum sit d m ad d b, ut h n ad h b: erit permutando d m ad h n, ut d b ad h b. est autem d b ad h b, ut e f ad g. quare ut e f ad g, sic d m ad h n; hoc est altitudo coni a m c ad altitudinem coni k n l. Sed est d m axis portionis coni a m c: & h n axis portionis coni k n l: & ut axis d m ad axem h n, sic altitudo m o ad altitudinem n p, propter similitudinem triangulorum d m o, h n p. ergo & altitudo portionis coni a m c ad altitudinem portionis coni k n l est, ut e f ad g. est autem coni a m c ad conum k n l, seu portionis coni a m c ad portionem coni k n l, proportio composita ex proportione basium, & proportione altitudinum, ut superius est demonstratum, quarum utræque eædem sunt proportioni e f ad g. conus igitur a m c ad conum k n l, siue coni portio a m c ad coni portionem k n l; hoc est portio conoidis a b c ad portionem conoidis k b l, proportionem habet duplam eius, quæ est e f ad g; hoc est eam, quam habet e f ad c: & diuidendo excessus, quo portio conoidis a b c excedit portionem conoidis k b l, uidelicet a k l c ad portionem k b l eam habet, quam f ad e: & denique conuertendo portio conoidis k b l ad reliquam partem a k l c proportionem habet, quam e ad f: quod fecisse oportebat.*

## PROPOSITIO XI.

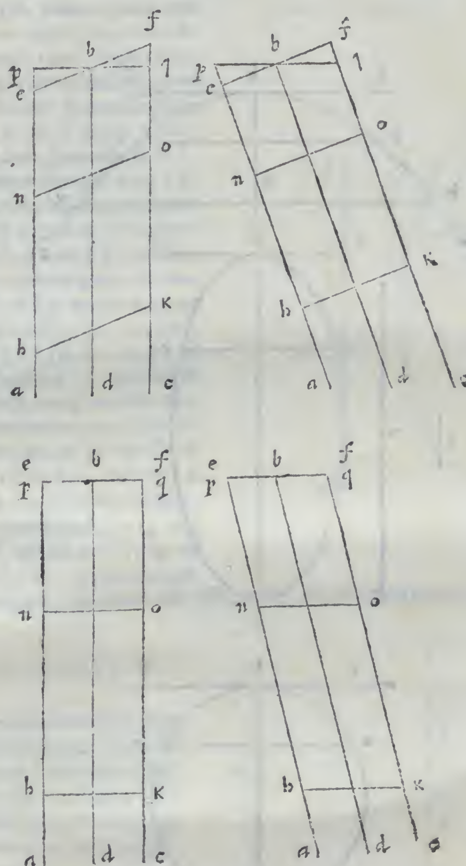
A dato cono, uel cylindro, uel cylindri portione, uel sphæra, uel sphæroide, uel conoide rectangulo, plano, quod sit alteri dato plano æquidistans, partem abscindere æqualem, aut dato cono, aut cylindro, aut sphæræ, aut sphæroidi, aut horum cuiuslibet, aut conoidis portioni.

*Conos, & cylindros, seu cylindri portiones, à quibus abscindenda pars est, hoc loco eiusmodi intelligemus, ut in infinitum produci possint, qualia sunt conoidea ipsa. Sit primum datus conus a b c, cuius axis b d: & sit datum planum quomodocunque ductũ, cuius recta linea e b f: oporteat autem ab eo partem abscindere, plano æquidistanti ipsi e b f, quæ sit æqualis dato cono, aut cylindro, aut sphæræ, aut sphæroidi, aut horum cuiuslibet, aut conoidis portioni, in qua g. Itaque à cono a b c, plano, cuius recta linea h k, æquidistanti ipsi e b f, conum, uel coni portionem abscindemus h b k, maiorem ipso g: & quam proportionem habet g ad excessum, quo ipsum exceditur ab h b k, eandem habeat l ad m. conum ergo, uel coni portionem h b k, plano basi æquidistanti, ex antedictis ita secabimus, ut pars, quæ est uersus b ad reliquam partem proportionem habeat, quam l ad m. sit autem ea n b o. manifestum est ex nona quinti n b o æqualem esse ipsi g. & cum planum, cuius recta linea n o, basi æquidistet, æquidistabit & ipsi e b f: & erit à cono a b c, pars n b o, æqualis ipsi g, abscissa plano æquidistanti dato plano.*



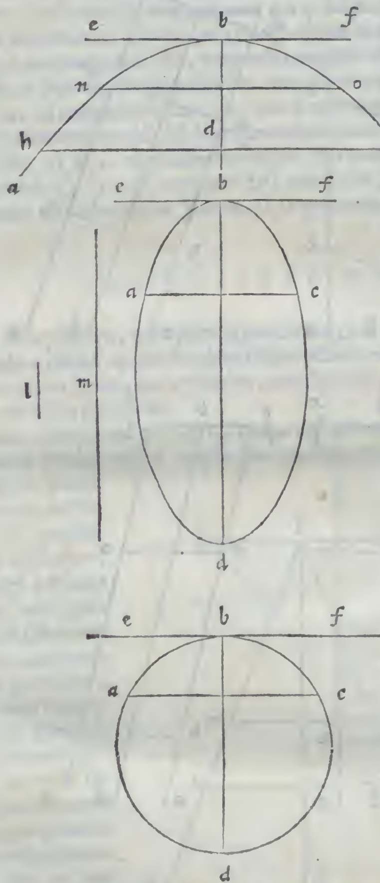

*Sit datus cylindrus, uel portio cylindri a p q c, cuius axis b d: & planum ex superiori parte,*

circulus, uel ſpatium contentum ellipſi circa diametrum p q: ſitq́; datum planum, cuius recta linea e b f, ut eius pars e b ſecet cylindrum, uel cylindri portionem; b f uero extra cadat: & à dato cylindro, ſeu cylindri portione a p q c, partem abſcindere oporteat, æqualem eidem g, plano æquidiſtanti ipſi e b f. producatur cylindrus, ſeu cylindri portio uſque ad planum e b f: & ducto alio plano h k æquidiſtanti e b f, abſcindatur pars maior ipſo g, quæ ſit h e f k; aut cylindrus; aut cylindri portio: & rurſus quam habet proportionem g ad exceſſum, quo exceditur ab h e f k, ha-




beat l ad m. Ipſo autem h e f k ſecto ſecundum proportionem l ad m, plano n o, æquidiſtanti eis, quæ ex oppoſito planis, erit eadem ratione n e f o æqualis ipſi g. ſed n p q o eſt æqualis ipſi n e f o; propterea quòd p b e cylindri particula æqualis eſt particulæ q b f, ex ijs, quæ demonſtrata ſunt ad ad undecimam huius, propoſitione octaua. æqualis eſt igitur n p q o ipſi g: & eſt planum n o æquidiſtans ipſi e b f plano dato. Si uero datum planum æquidiſtet ſuperiori plano p q, uel idem ſit ei: ſimiliter abſcindemus partem maiorem, quàm ſit g, ducto plano h k, ipſi p q æquidiſtanti; & rurſus ducto alio plano n o, æquidiſtanti eis, quæ ex oppoſito, ita ſecabimus, ut n p q o ad h n o k eandem proportionem habeat, quam habet g ad exceſſum, quo exceditur ab ipſo h p q k. erit & n p q o æqualis g: & planum n o æquidiſtabit dato plano.

*Sit præterea datum conoides rectangulum a b c: & datum planum quomodolibet ductum, tangens conoides in puncto b, cuius recta linea e b f. abscindemus & hic plano ducto h k, æquidistanti ipsi e b f, conoidis portionem h b k, maiorem, quàm g: & ut g ad excessum, quo exceditur à conoidis portione h b k, ita sit l ad m. Rursus ex superius demonstratis, plano n o ducto æquidistanti basi diuidemus h b k in partes proportione respondentes ipsis l m. quo facto, erit item conoidis portio n b o, æqualis ipsi g, abscissa plano æquidistanti plano dato.*



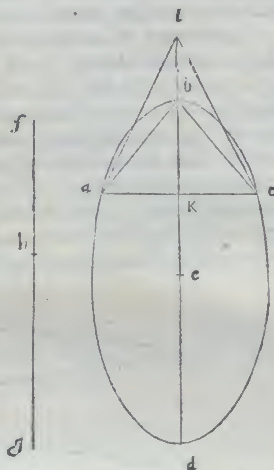

*Sit demum datum sphæroides, seu sphæra a b c d: & datum planum tangens in puncto b, cuius recta linea e b f: & ut g ad excessum, quo exceditur ab a b c d, sit l ad m. sphæroides ergo, uel sphæram secabimus in partes, quæ proportione respondeant ipsis l, m, plano ducto, cuius recta linea a c, æquidistanti e b f. erit similiter a b c portio æqualis ipsi g, abscissa plano, ut oportebat.*

PROPOSI-

PROPOSITIO XII.

A' sphæroide dato portionem plano sic abscindere, ut portio ad conum, cuius eadem est basis, & idem axis, proportionem habeat similem datæ proportioni, si modo data proportio maior sit ea, quam habet 3 ad 2.

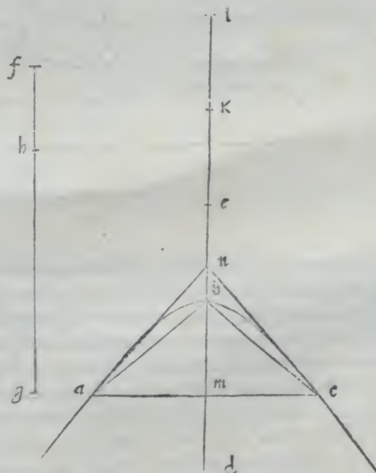
*Sit datum sphæroides a b c d: data autem proportio sit f g ad g h, maior, quàm quæ est 3 ad 2: & oporteat ab ipso portionem abscindere, quæ ad conum: cuius eadem est basis, & idem axis, proportionem habeat, quam f g habet ad g h. Secetur sphæroides plano per axem ducto: & sit sectio ellipsis a b c d, cuius diameter, & axis sphæroidis sit b d, centrum e. Et quoniam utraque linea e d, d b ad d b proportionem habet eam, quam 3 ad 2: habebit f g ad g h maiorem proportionem, quàm e d, d b ad d b: & diuidendo per uigesimam nonam quinti ex traditione Campani f h ad h g maiorem, quàm e d ad d b. fiat ut f h ad h g, sic e d ad d k. erit componendo ut f g ad g h, sic e d, d k ad d k. ducatur per k planum a k c, erectum sit per b d. Dico iam portionem sphæroidis a b c ad conum a b c eandem habere proportionem, quam f g ad g h. Sit enim, ut utraque simul e d, d k ad d k, ita l k ad k b. erit conus a l c æqualis portioni a b c ex corollario trigesimæ tertiæ huius. & quoniam est, ut f g ad g h, ita e d, d k ad d k: & l k ad k b; hoc est conus a l c ad conum a b c: sequitur conum a l c; hoc est portionem a b c ad conum a b c esse, ut f g ad g h: quod facere oportebat.*




PROPOSITIO XIII.

A' dato conoide obtusiangulo portionem plano abscindere ita, ut portio ad conum, cuius basis portioni eadem est, & axis idem, datam habeat proportionem. oportet autem datam proportionem minorem esse ea, quam habet 3 ad 2.

*Sit datum conoides obtusiangulum a b c, cuius linea ad axem adiecta sit b e: data uero proportio f g ad g h minor, quàm quæ est 3 ad 2: & oporteat ab ipso portionem abscindere habentem ad conum, cuius eadem est basis, & idem axis, proportionem eam, quam habet f g ad g h. Secetur conoides plano per axem ducto: & sit sectio hyperbole a b c, cuius diameter, & axis portionis b d: ipsi autem b e æqualis ponantur e k, k l. habebit l b ad k b proportionem eam, quam habet 3 ad 2. quare f g ad g h minorem*



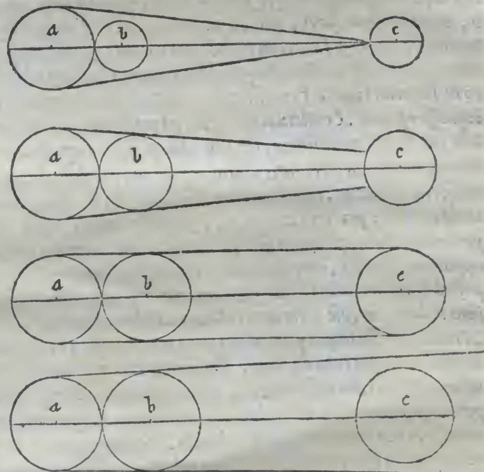
*minorem habebit proportionem, quàm lb ad kb: & diuidendo fh ad hg minorem, quàm lk ad kb. Itaque fiat ut fh ad hg, sic lk ad km: & per m ducatur linea amc perpendicularis ad bd: & per ipsam amc ducatur planum super bd erectum. Dico portionem conoidis abc habere ad conum abc eandem proportionem, quam fg ad gh. ut enim lm ad km, ita fiat nm ad mb. erit ex corollario uigesimæ septimæ huius, conus anc æqualis portioni abc. est autem ut fh ad hg, ita lk ad km. quare componendo erit ut fg ad gh, ita lm ad km: & ita nm ad mb; hoc est conus anc ad conum abc. erit igitur conus anc; hoc est portio abc ad conum abc, ut fg ad gh: quod fecisse oportebat.*

EIVSDEM

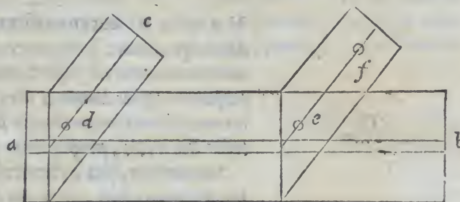
# EIVSDEM COMMENTARIVS IN LIBRVM DE ARENAE NVMERO.

Q VONIAM autem uiſus non à puncto uidet, ſed à magnitu A
dine quadam. ] *Vertices enim pyramidum uiſualium non ſolum non terminantur ad ſuperficiem oculi exteriorem. Sed etiam ultra ſuperficiem ipſius humoris chryſtallini protenduntur; alioqui perfecta rerum uiſarum comprehenſio fieri nullo modo poſſet, ut monſtrauit Vitellio lib. tertio, propoſitione decima octaua, & ſequentibus.*

Sumantur duo cylindruli &c. ] *Sint duo cylindruli æquales in* B
*ter ſe; unus albus, alter non albus: ſitq́; albi baſis circulus, in quo c non albi circulus, in quo b: uiſus autem, in quo a: & conſtituantur cylindruli in regula; ita ut albus à uiſu remotior ſit, non albus, quàm proximus ipſi: & baſium centra, & centrum uiſus ſint in eadem recta linea a b c. Si igitur cylindruli uiſu multo ſubtiliores ſint: præteritur is, qui proximus eſt uiſui, & uidetur albus totus. quanquam enim cylindrus, in quo b, prohibeat, quo minus ſpecies punctorum ſuperficiei cylindri in quo c, oculo oppoſitorum directe tendant ad uiſum: non tamen prohibere poteſt ob eius paruitatem, ne oblique in ipſum incidentes, atque ad eius ſuperficiem refractæ uideantur, ut in prima figura apparet. eſt tamen ea uiſio ſatis confuſa. nam diſtincta uiſio fit tantum per lineas perpendiculares à punctis rei uiſæ ad oculi ſuperficiem pertinentes: quod idem monſtrauit Vitellio eodem lib. propoſitione decima ſeptima. Si uero non totus albus, ſed ipſius partes quæpiam uideátur ex utraque parte non albi: ſubtiliores quidem uiſu cylindruli erunt, non tamen multo ſubtiliores, ut in ſecunda figura. Quòd ſi ea demum magnitudine ſumantur cylindruli, ut alter alterum uiſui abſcondat, & non ampliori loco, ut in tertia figura: ij profecto non erunt uiſu minores. ſi enim ampliori loco abſconderet: etiam uiſu ipſo maiores eſſent: quod ex quarta figura fit manifeſtum. Habita igitur magnitudine non minore uiſu, facile habetur & locus, in quo radij uiſuales coeunt, quem non nulli appellant centrum uiſus; & quantitas anguli, minoris, ſcilicet, & maioris angulo, cui ſol accommodatur. nanque ea magnitudine ad extremum regulæ collocata, in quo eſt uiſus, & ex altera eiuſdem regulæ parte poſito cylindro, ita ut ultro, citroq́; moueri poſſit: conuertatur regula ad ſolem: cylindrus autem ſolem totum abſcondat: mox eo à uiſu abducto, ubi primum ex utraque parte, tam cylindri, quàm magnitudinis incipiat ſolis minimum quippiam apparere, ſtabiliatur illic cylindrus. neceſſarium enim arbitror in hac obſeruatione, ſi recta facienda eſt, ut & magnitudo, & cylindrus eodem angulo, qui per uiſionem fit, contineantur: quod tamen non explicauit Archimedes. Itaque ductis lineis contingentibus magnitudinem, & cylindrum, erit angulus his lineis comprehenſus, minor angulo, cui ſol accommodatur, uerticem habente ad uiſum; quoniam centrum uiſus in eo loco erit, in quo dictæ lineæ conueniunt. Rurſus eadem ratione adducto ad uiſum cylindro, ubi primum*

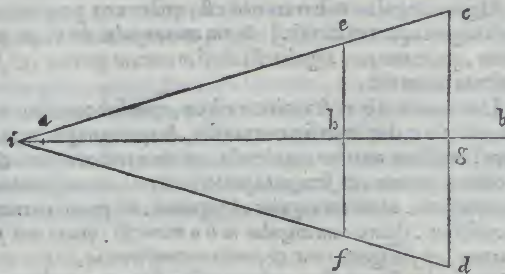


mum solem totum abscondat; illic stabiliatur; ductisq; lineis, & cylindrum, & magnitudinem tangentibus, erit qui dictis lineis continetur, angulus maior angulo, cui sol accommodatur, uerticem similiter ad uisum habente. Hæc est, ut opinor, Archimedis instrumenti forma, & hic usus, à quo non multum sane abhorret Dioptra Hipparchi, qua & Ptolemæus solis, & lunæ Diametros obseruauit. construxit enim Hipparcus, ut Proclus in Hypotyposi Astronomicarum positionum scribit, regulam quandam, nulla ex parte flexibilem, non minorem cubitis quatuor. postea per mediam ipsius longitudinem, linea longitudinem totam diuisit: & in hac canaliculum insculpsit formam habentem securis, in quem accommodauit ad rectos angulos prismatium quoddam conuenienti magnitudine: atque eius basim in concauitatem canalis ita congruenter immisit, ut sine ullo impedimento erectum super regulæ latus moueri posset; & per totam ipsius longitudinem percurrere. alterum rursus prismatium similiter apposuit ad rectos angulos ipsi regulæ in altera eius extremitate; quod immobile esset, & in usu semper ad uisum admotum: ipsumq; perforauit foramine uno in media eius latitudine, & magis ad basim; hoc est ad ipsam regulam. alterum uero prismatium, quod, ut diximus, mobile esset, duobus rursus foraminibus perforauit: uno quidem respondente ipsi manentis foramini, in eadem recta linea similiter ad basim; altero autem circa extremitatem prismatij superiorem, & ipso respondente foraminibus, qui ad basim, & in eadem recta linea. sit enim regula a b, cuius quidem pars, quæ ad uisum a, in qua defigatur prismatium c d, alterum autem prismatium, quod est futurum mobile per totam regulæ longitudinem, sit e f, habens dicta duo foramina secundum directionem quandam; unum quidem ad basim, respondens foramini d, alterum uero in superiori parte f, ut sit instrumenti forma huiusmodi.




Vsum autem, & positionem ipsius talem esse oportet. Constituatur regula ad orientem, uel occidentem solem, in plano horizonti parallelo, ut sit sol purissimus, & sine ullo prorsus impedimento ad horizontem: sitq; prismatium quidem immobile ad spectantis uisum appositum: mobile autem ad partem solis, quod eousque ultro, citroq; transferatur, quousque per foramina d, e, quæ sunt in duobus prismatijs, inferior solis circumferentia; per ipsa autem d, f superior uideri possit. ita enim à spectantibus & extrema deprehenduntur apparentis solaris diametri, & angulus e d f, cui subtenditur eadem solis diameter apparens; hoc est, quæ distantiæ prismatij e f proportione respondet. Hæc Proclus. Excogitauit postea Rabi leui aliud instrumentum non dissimile instrumento Archimedis, & ad eundem propè usum ualens, ut ipse scriptum reliquit iu libro, quem de Astrologia edidit, cuius uerba quoniam ad Archimedis locum explicandum maxime faciunt, hic apponenda censuimus, quemadmodum habentur in latina translatione. Possumus etiam geometrice demonstrare, in quo loco oculi centrum uisus existat, cum instrumento, quod inuenimus ad experientias locorum planetarum, in quouis tempore capiendas: ideo in hoc loco declarabimus de opere instrumenti prædicti, quantum est necessarium pro ista demonstratione habenda. faciemus igitur unum baculum cum superficiebus planis, ac rectis: & in uno capite illius sit una tabella, quæ aliqualiter sit cornuta; cuius alterutrum cornu experientiæ tempore ponetur super alterutram pupillam oculi: & habebimus multas tabellas diuersarum quantitatum perforatas in medio habentes rectas, per quarum foramina intrabit baculus antedictus: & sit altitudo earum super baculum aliquantulum depressior altitudine oculi: & ponemus duas earum in simul in baculo supradicto, unam alteri inæqualem, ita, quòd minor sit propinquior oculo: & supra baculum ambæ faciant angulos rectos: & sint parallelæ: & lineæ procedentes à centro oculi tangant utranque extremitatem utriusque tabellæ: & tetminentur ad cœlum, & facto hoc, in certitudine nobis possibili facile sciemus locum, in quo centrum uisus existit, quia dictæ tabellæ sunt parallelæ; & faciunt angulos rectos cum baculo: & lineæ parallelæ intersecant trianguli lineas in tali proportione, qualem una habet ad aliam: & in tali proportione intersecarent omnes lineæ parallelæ, quæ essent ab angulo trianguli usque ad lineam ei subtensam, uel basim. Sed quia distantia unius ad aliam est cognita: & proportio unius ad aliam cognita, ideo inde habebimus scientiam anguli trianguli, in quo centrum uisus existit, Quia qualem proportionem habet linea procedens

*cedens per baculum à centro uisus usque ad minorem tabellam, ad seipsam, ut procedit ab eodem centro ad tabellam maiorem; habet minor tabella ad maiorem. & quia commutamus; diuidimus; & conuertimus: est manifestum, quòd proportio minoris tabellæ ad lineam, quæ uenit à centro uisus ad eam, sit talis, qualis est proportio differentiæ inter maiorem tabellam, & minorem, ad spatium, quod est inter utranque. Sed quia proportio differentiæ inter maiorem tabellam, & minorem, ad spatium prædictum est scita: & quantitas tabellæ minoris est scita: sequitur, quòd proportio minoris tabellæ ad lineam procedentem à centro uisus ad eam est scita: & quòd quantitas dictæ lineæ sic procedentis à centro sit etiam scita. Verbi gratia, sit in superficie baculi linea quæ signetur a b, quæ ab oculo ad baculi caput procedat: & ex parte puncti a sit oculus: & sint in tabellis duæ lineæ parallelæ ex partibus, quibus aspiciuntur ab oculo; quæ parallelæ intersecent lineam a b; hoc est lineæ c d, & e f: & linea c d sit maior e f, & linea c d intersecet lineam a b in puncto g; & linea e f intersecet eam in puncto h, & protrahemus lineas c e, & d f: & quia duæ lineæ rectæ secundum c d, & e f, sunt uisæ ab oculo eiusdem anguli: clarum est, quòd si dictæ duæ lineæ secundum c e, & d f protrahentur, in centro uisus concurrent: & ponamus: quòd concurrant in puncto i, & signemus lineam a i: manifestum est, quòd linea b a i est una linea recta; quia posuimus centrum uisus in rectitudine lineæ b a. Item quia linea c g est æqualis lineæ g d: & linea e h est æqualis lineæ h f; & linea g h est communis istis duobus quadrangulis: & angulus c g h est æqualis angulo d g h: & angulus g h e est æqualis angulo g h f: manifestum est, quòd si figura d h supponeretur figuræ c h se per omnia tangerent, ac si unica esset figura; quia punctus d caderet super punctum c. & punctus f super punctum e. Quare manifestum est, quòd angulus g d f est æqualis angulo g c e. unde sequitur, quòd triangulus i c d habet crura æqualia; quia duo eius anguli iuxta basim sunt æquales. quare manifestum est, quòd linea, quæ uenit à puncto i ad punctum g, quæ diuidit lineam c d intersecat lineam c d ad angulos rectos. sed quia linea a g intersecat c d ad angulos rectos: sequitur, quòd linea producta à puncto i ad punctum g transit per punctum a. unde sequitur, quòd linea i a g est una linea recta. & quia triangulus c d i habet infra se lineam e f parallelam lineæ c d, quæ est basis anguli dicti trianguli: manifestum est, quòd qualem proportionem habet linea e i ad lineam c i, talem habet linea e f ad lineam c d. & per istum modum probaretur, quòd qualem proportionem habet linea e h ad lineam c g, talem habet linea i h ad lineam i g. & quia commutamus proportionem, & eam diuidimus: est manifestum, quòd proportio, quam habet e h ad lineam i h est talis, qualem habet differentia lineæ c g super lineam e h, ad lineam g h, quæ est differentia, quam habet linea i g super lineam i h. sed differentia, quam habet linea c g super lineam e h est scita; quia quantitas lineæ c g est scita; & quantitas lineæ e h est scita: remanebit quantitas lineæ i h scita; quia proportio quantitatis e h, quæ est scita ad lineam i h est scita. Et nos cum profunde cum maximo labore quæsiuerimus ueritatem: inuenimus punctum i in isto, uerbi gratia in centro uisus; quòd est in centro humiditatis congelatæ. & ista inquisitio fuit necessaria ualde; quia sine ea non poteramus inuenire anguli experientiæ ueritatem sine errore; quando respiciebamus cum instrumento isto duo corpora radiosa: & uolebamus scire arcum distantiæ inter unum, & reliquum; quia si poneremus centrum uisus infra spatium, quod continet i, & h: iudicaremus arcum distantiæ unius ad alium maiorem; quod esset, quia angulus experientiæ est maior. & per oppositum iudicaremus eam minorem, si dictum centrum poneremus ultra i.*




Linea igitur h k maior est, quàm d k: quoniam sol ponitur supra horizontem esse.] *Ducatur recta linea h d, & producatur: rursusq; à puncto h super h d, perpendicularis alia ducatur h c, secans mundum in e. erit punctum c in horizonte situm, cum h d producta ad horizontis polum, quem zenit uocant, pertineat. si igitur k centrum solis in c intelligatur esse, uel etiam infra sub horizonte: ductis d k, h k lineis, ipsa d k maior erit, quàm h k: quoniam angu-* C

*lus d h k, cui ſubtenditur, uel rectus eſt, uel obtuſus. ſole autem toto ſupra horizontem exorto: cum ſemidiameter ſolis maior ſit terræ ſemidiametro, angulus h d k erit obtuſus. quare linea h k contra maior erit, quàm ipſa d k.*

D Et idcirco angulus l d x maior eſt angulo m h o.] *Hoc ita eſſe conſtat ex iis, quæ monſtrantur in uigeſima quarta propoſitione optices Euclidis, & ſexageſima ſeptima quinti libri Vitellionis. quare oculo in d exiſtente, quanquam minus uideatur ex corpore ſolis, quàm eo exiſtente in h, tamen plus uideri exiſtimabitur.*

* Quare angulus m h o minor eſt, quàm una pars anguli recti in centum quatuor, & ſexaginta partes diuiſi.] *Nam cum angulus l d x, qui quidem maior eſt angulo m h o, ſit minor, quàm una pars anguli recti diuiſi in centum quatuor, & ſexaginta partes: angulus m h o, multo ea minor erit.*

E Linea uero a b recta minor eſt ea, quæ ſubtenditur uni portioni circumferentiæ circuli a b c diuiſæ in ſexcentas ſex, & quinquaginta partes.] *In circumferentia enim circuli conſiſtunt quatuor anguli recti, qui circa centrum ſunt: & cum rectus quiſque diuiſus fuerit in centum quatuor, & ſexaginta partes; erit tota circumferentia diuiſa in partes ſexcentas ſex, &*
33. ſexti. *quinquaginta. ut autem angulus ad angulum, ita portio circumferentiæ ad portionem, in quibus hi conſiſtunt. Quare cum angulus m h o minor ſit, quàm una pars anguli recti, diuiſi in centum quatuor, & ſexaginta: erit & portio circumferentiæ, in qua conſiſtit, hoc eſt circumferentia a b minor, quàm ſexcenteſima quinquageſima ſexta pars totius circumferentiæ: & propterea a b recta linea minor, quàm quæ eidem ſexcenteſimæ quinquageſimæ ſextæ parti ſubtenditur.*

F Non enim ignoras iam demonſtratum à nobis cuiuslibet circuli circumferẽtiam maiorẽ eſſe, quàm triplam &c.] *Hoc demonſtrauit Archimedes in libro de dimenſione circuli.*

G Linea ergo recta b a, ad h k minorem habet proportionem, quàm undecim ad mille centum octo, & quadraginta.] *Nam cum ambitus figuræ laterum ſexcentorum ſex, & quinquaginta, ad ſemidiametrum minorem habeat proportionem, quàm quatuor, & quadraginta ad ſeptem: hoc eſt quàm ſexcenta ſex, & quinquaginta ad centum quatuor, & quatuor undecimas: habebit eius figuræ latus ad ſemidiametrum proportionem minorem, quàm unum ad centum quatuor, & quatuor undecimas. & cum recta linea a b minor ſit latere dictæ figuræ, ut demonſtratum eſt: habebit ad ſemidiametrum h k. multo minorem proportionem, quàm unum ad centum quatuor, & quatuor undecimas; hoc eſt quàm undecim ad mille centum octo & quadraginta. proportio enim, quam habet unum ad centum quatuor, & quatuor undecimas, ad integros numeros redacta, eſt ea, quam habet undecim ad mille centum octo & quadraginta. quod quidem numeris harum proportionum decuſſatim multiplicatis deprehenditur, ut nos monſtrauimus in comm. in librum de dimenſione circuli, propoſitione ſeptima.*

H Quare linea b a minor eſt, quàm centeſima pars lineæ h k.] *Cum enim linea b a minorem habeat proportionem ad lineam h k, quàm 11 ad 1148: ſitq; 11 minor, quàm centeſima pars 1148: erit b a multo minor, quàm centeſima ipſius h k.*

I Ipſi autem b a æqualis eſt diameter circuli s g; propterea quòd u a eius dimidia &c.] *Ob æqualitatem uidelicet, atque ſimilitudinem triangulorum h a u, & h k r. angulo enim h u a recto æqualis eſt h r k angulus, qui & ipſe rectus eſt: et qui ad h communis eſt utriſque. reliquus igitur angulus, reliquo angulo æqualis: & triangulum triangulo ſimile. quare ut h k ad h a, ita k r ad a u. at uero h k eſt æqualis ipſi h a, cum ſint ſemidiametri eiuſdem circuli: ergo & k r ipſi a u eſt æqualis: & idcirco dupla ipſius k r, quæ eſt diameter circuli s g, duplæ a u; hoc eſt ipſi b a æqualis erit.*

K Quòd d e f circulus minor ſit circulo s g.] *Ex poſitione uidelicet, poſuimus enim ſolem maiorem eſſe ipſa terra.*

L Quare h k ad y s minorem proportionem habet, quàm centum ad nouem & nonaginta.] *Cum enim utræque h y, k s ſint minores, quàm centeſima pars ipſius h k: erit reliqua y s maior, quàm nouem & nonaginta partes eiuſdem h k. quare h k ad ipſam y s minorem habebit proportionem, quàm centum ad nouem & nonaginta.*

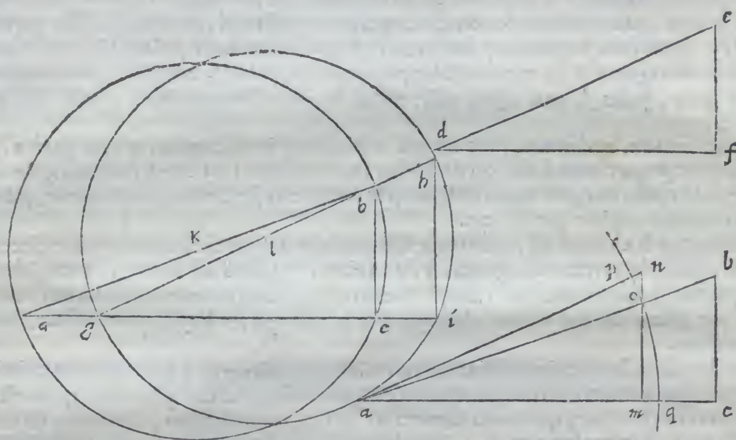
M Et linea s y minor, quàm d t.] *Iungantur d, y ducta linea, & iungantur item s t: linea*
16. tertii. *uero d t ſecet ipſam y s in puncto z. erit trianguli d y z angulus, qui eſt ad y obtuſus; nam quæ circulum tangit in puncto y cum linea y z facit angulum rectum. quare latus d z maius erit la-*
19 primi. *tere y z. Rurſus eadem ratione trianguli t s z angulus ad s maior erit: & idcirco latus z t maius*

latere

*latere z s. Itaque duo latera d z, z t, quibus æqualis est ipsa d t linea, maiora sunt duobus lateribus y z, z s. atque his ipsis linea y s est æqualis. linea igitur y s minor est linea d t, ut proponebatur.*

Minorem proportionem habet h r ad d t, quàm centum ad nouem & nonaginta.] *Cum linea h r minor sit, quàm h k; quòd subtenditur minori angulo: habebit h r ad y s minorem proportionem, quàm h k ad eandem. & rursus cum y s minor sit, quàm d t, ut monstrauimus: habebit h r ad d t etiam minorem, quàm ad y s. ergo h r ad d t minorem proportionem habet, quàm h k ad y s. sed h k ad y s monstratum est habere minorem, quàm centum ad nouem, & nonaginta. quare h r ad d t multo minorem proportionem habebit, quàm centum ad nouem & nonaginta.* N 19. primi. 8.quinti.

Si enim duo triangula rectangula, altera duorum laterum, quæ sunt circa angulum rectum, æqualia habeant; altera autem inæqualia; maior angulus eorum, qui lateribus inæqualibus continetur ad minorem, maiorem quidem proportionem habet, quàm maior linea angulo recto subtensa ad minorem; minorem uero, quàm maior eorum, quæ ad angulum rectum consistunt, habeat ad minorem.] *Sint duo triangula rectangula a b c, d e f; quorum anguli recti ad c f puncta constituti sint: trianguli uero a* O




*b c latus b c æquale sit lateri e f trianguli d e f: & a c latus maius latere d f. Dico angulum e d f, qui maior est angulo b a c, ad eundem ipsum maiorem quidem habere proportionem, quàm b a latus ad latus e d; minorem uero, quàm latus a c ad latus d f. Abscindatur à linea a c, linea æqualis ipsi d f; quæ sit c g: & ducta g b producatur usque ad h; ita ut g h fiat æqualis ipsi a b: & rursus producta a c ad ipsam à puncto h, demittatur perpendicularis h i, quæ erit æquidistans ipsi b c.* 28. primi. *secta autem linea a b bifariam à puncto k, centro quidem k, interuallo uero k a, circulus describatur a b c: & similiter secta g h bifariam in l, centro l, & interuallo l g, describatur alter circulus g h i. Iam constat triangulum g b c æquale esse, atque simile triangulo d e f: & a b c circulum circulo g h i æqualem; cum æquales sint eorum diametri: circuli uero a b c circumferentia per c punctum transibit: & similiter circumferentia circuli g h i transibit per punctum i: quoniam anguli* 31. tertii. *g c b, g i h utrique recti sunt. angulus ergo h g i ad angulum b a c eam proportionem habet, quam* ult. sexti. *circumferentia h i ad circumferentiam b c: & circumferentia h i ad b c circumferentiam maiorem proportionem habet, quàm recta linea h i ad rectã lineam b c: quod demonstrauit Ptolemæus in primo magnæ compositionis lib. quare angulus h g i ad angulum b a c maiorem habet, quàm recta linea* 13.quinti. *h i ad ipsam b c. sed h i ad b c ob similitudinem triangulorum eam proportionem habet, quam h g;* 4. sexti. *hoc est b a, ad b g; hoc est ad e d. angulus igitur h g i; hoc est e d f ad b a c angulum habet maiorem proportionem, quàm b a linea ad lineam e d.*

*Rursus à linea a c abscindatur a m, æqualis ipsi d f: & ad datum in ea punctum a constitua-*
23. primi. *tur angulus n a m, æqualis angulo f d e: fiatq; a n æqualis ipsi d e: & iungantur n m ducta linea, quæ secet lineam a b in puncto o. erit triangulum n a m æquale, atque simile triangulo e d f, &*
8. quinti. *centro quidem a, interuallo autem a o circulus describatur p o q. sector igitur a p o ad sectorem a o q minorem proportionem habet, quàm ad triangulum a o m. sed a p o sector ad triangulum a o m minorem habet, quàm triangulum a n o ad idem ipsum; quoniam sector a o q maior est triangulo a o m: & triangulum a n o maius sectore a p o. ergo a p o sector ad sectorem a o q minorem*
ult. sexti. *habet proportionem, quàm a n o triangulum ad triangulum a o m. ut autem sector a p o ad se-*
1. sexti. *ctorem a o q, ita angulus n a o ad angulum o a m: & ut triangulum a n o ad triangulum a o m,*
28. quinti. *ita linea n o ad lineam o m. angulus igitur n a o ad angulum o a m minorem habet proportionem, quàm linea n o ad lineam o m: & componendo angulus n a m ad angulum o a m, minorem habet,*
4. sexti. *quàm linea n m; hoc est b c ad lineam o m. ut autem b c ad o m, ita a c ad a m; hoc est ad d f. Quare angulus n a m, hoc est, e d f ad ipsum b a c angulum minorem proportionem habet, quàm linea a c ad lineam d f: quod monstrare oportebat.*

P Quare angulus l d x ad angulum m h o, minorem proportionem habet &c.] *Ex decima quinta quinti. nam angulus l d x duplus est anguli k d t: & angulus m h o item duplus anguli k h r.*

Q. Et quoniã angulus l d x maior est quàm ducentesima pars anguli recti; erit angulus m h o maior, quàm nouem & nonaginta partes anguli recti, in uiginti millia partiũ diuisi.] *Quam enim proportionem habet 1001 ad 99, eandem habet* $\frac{1}{200}$ *ad* $\frac{99}{20000}$. *quare angulus l d x ad angulum m h o minorem habet proportionem, quàm* $\frac{1}{200}$ *ad* $\frac{99}{20000}$. *& cum angulus*
8. quinti. *l d x sit maior, quàm* $\frac{1}{200}$ *pars anguli recti: erit & angulus m h o multo maior, quàm* $\frac{99}{20000}$ *ipsius recti.*

R Quare maior, quàm una pars anguli recti, diuisi in ducentas, & tres partes.] *Rursus quam proportionem habet 99 ad 20000, eandem habet 1 ad* $202\frac{2}{99}$. *angulus igitur m h o maior est, quàm una pars anguli recti, diuisi in partes* $202\frac{2}{99}$: *& idcirco multo maior, quàm una pars eiusdem diuisi in partes 203.*

S Linea ergo b a maior est, quàm quæ subtenditur uni parti circumferentiæ circuli a b c, diuisæ in partes octingentas & duodecim.] *Quòd si a b maior sit, quàm subtensa uni portioni circumferentiæ circuli, diuisæ in partes octingentas, & duodecim: multo maior erit, quàm quæ subtenditur uni portioni circumferentiæ in mille partes diuisæ. quare constat, quod proponebatur.*

T Etenim ostensum est circuli diametrum minorem esse tertia parte ambitus uniuscuiusque figuræ multorum angulorum in circulo descriptæ, quæ pluribus, quàm sex lateribus contineatur; quoniam hexagono in circulo descripto, diameter circuli tertia pars est ipsius hexagoni.] *Nam hexagoni latus semidiametro circuli, in quo describitur, est æquale, ut patet ex corollario decimæ quintæ quarti elementorum. Heptagono autem æquilatero in circulo descripto, erit ex ijs, quæ tradita sunt à Ptolemæo in magna compositione, latus ipsius maius, quàm 52 partes earum, quarum diameter est centum & uiginti. quare totus ambitus maior, quàm 364. sed 364 est maior, quàm triplus 120. multo igitur maior erit ambitus dictæ figuræ, quàm triplus diametri circuli, in quo ipsa describitur.*

*Rursus Octagono æquilatero in circulo descripto, latus ipsius maius erit, quàm* $45\frac{11}{12}$ *earundem partium: & ambitus maior, quàm* $367\frac{1}{3}$. *quare cum* $367\frac{1}{3}$ *maior sit, quàm triplus 120: erit figuræ ambitus multo maior, quam triplus diametri circuli, in quo describitur. Et eodem modo in reliquis figuris, idem contingere facile demonstrabimus. quo autem pluribus lateribus constat figura, eo maiori ambitu continetur: atque ad circuli circumferentiam propius accedit.*

V. Sed iam utile esse arbitror de numerorum denominationibus dicere, ut ne decipiantur illi.] *Quoniam in hoc negocio Archimedes necesse habuit numeris uti magnis; qui nisi per obscuram quandam myriadum repetitionem Græcorum more, nominari non possunt; rem utilem se facturum existimauit, si modum traderet, quo numerus quantum uis magnus facile, atque aperte exprimeretur. Itaque distribuit numeros ipsos in singulas octades; ita ut primæ octadis numeri, primi numeri dicantur; secundæ octadis numeri, secundi; Tertiæ tertij; quartæ quarti; & ita in reliquis. atque hac ratione primæ octadis numerus primus, unitatum numerus est; secundus denariorum unitatum; tertius centenariorum; quartus millenariorum; quintus denum millenariorum,*

*quæ*

*quæ à græcis myriades appellantur; ſextus denariorum myriadum eſt; ſeptimus centenariorum; octauus, & ultimus millenariorum. ſemper enim qui ſequitur numerus, præcedentis ſui relatiui decuplus eſt. ſecundæ octadis primus, qui numerus dicitur unitatum ſecundorum numerorum, denum millenariorum myriadum numerus eſt; ſecundus denariorum denum millenariorum myriadum; tertius centenariorum; quartus millenariorum; quintus myriadum, qui breuitatis cauſſa dicitur myriadum ſecundorum numerorum; ſextus denariorum myriadum; ſeptimus centenariorum; octauus, & ultimus millenariorum, qui millenariorum dicitur myriadum ſecundorum numerorum. Tertiæ octadis primus numerus eſt denum millenariorum myriadum, denum millenariorum myriadum, qui dicitur numerus denum millenariorum myriadum ſecundorum numerorum. quintus eiuſdem octadis numerus, qui myriadum dicitur tertiorum numerorum, myriadum eſt denum millenariorum myriadum, denum millenariorum myriadum: ultimus, qui millenariorum dicitur myriadum tertiorum numerorum, millenariorum eſt myriadum denum millenariorum myriadum, denum millenariorum myriadum. quartæ autem octadis primus denum millenariorum eſt myriadum, denum millenariorum myriadum, denum millenariorum myriadum; diciturq; denum millenariorum myriadum tertiorum numerorum: & eodem modo in ceteris. His ita diſpoſitis continet prima periodus numeros, qui ſunt ab unitatibus primorum numerorum uſque ad unitates ſecundorum: ſecunda periodus eos, qui ab unitatibus ſecundorum numerorum ſunt uſque ad unitates tertiorum: tertia ab unitatibus tertiorum ad unitates quartorum; ita ut nonus ab unitate numerus, finis ſit primæ periodi, & principium ſecundæ: ſeptimus decimus finis ſecundæ, principium tertiæ; cuius ipſius finis eſt uigeſimus quintus, qui idem eſt principium quartæ periodi, & ita deinceps. Quòd ſi ſint numeri ab unitate proportionales in decupla proportione, ut ſcilicet primus ſit unitas, ſecundus decem, tertius centum, quartus mille, & ſic in ceteris; erunt primi octo eorum, qui primi dicuntur numerorum: octo inſequentes eorum, qui ſecundi dicuntur; itemq; alij aliorum: primæ uero octadis quintus numerus, myrias erit; octauus & ultimus mille myriades: ſecundæ octadis primus, qui eſt unitas ſecundorum numerorum, decies mille myriades; quintus, myrias denum millium myriadum, qui myrias dicitur ſecũdorum numerorum; Vltimus mille myriades denum millium myriadum; hoc eſt mille myriades ſecundorum numerorum. Tertiæ Octadis primus, qui decies mille myriades dicitur ſecũdorum numerorum. decies mille myriades eſt denum millium myriadum. Huius ipſius octadis ultimus, mille myriades dicitur tertiorũ numerorũ: eſt autem mille myriades denum millium myriadum, denum milium myriadum. quartæ octadis primus decies mille myriades denum millium myriadum, denum milliũ myriadum; diciturq; decies mille myriades tertiorum numerorum: & eodem modo in reliquis procedemus. Erit igitur horum prima periodus decies mille myriades primorum numerorum, ſecunda decies mille myriades ſecundorum, tertia item tertiorum, quarta quartorum: & ſimiliter aliæ aliorum, qui ſequuntur. Hæc ſunt, niſi me fallit animus, in quibus dictorum Archimedis ſumma conſiſtit, ſed adeo ſunt deprauata, ut merito ignoſcendum, ſi non omnia reſtituantur.*

His igitur hoc modo denominatis, ſi ſint numeri ab unitate proportionales.] *Hæc præmiſit Archimedes, quoniam in eiuſmodi ratione his potiſſimum numeris utitur, ut ad rem ipſam facile breuiterq; demonſtrandam opportuniſſimis.* X

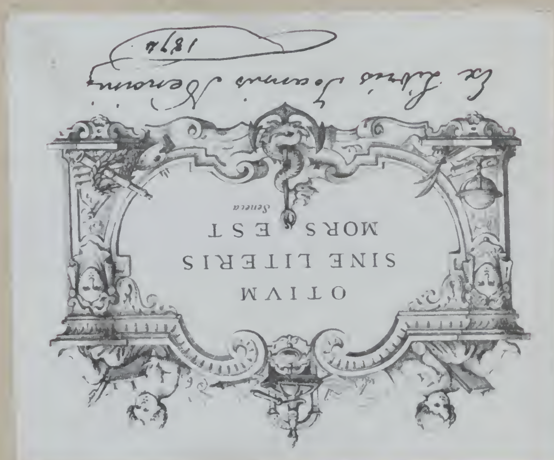
Eſt autem d ſecundum ſe ipſum multiplex ipſius a.] *Sequitur hoc etiam ex decima nona ſeptimi elementorum. nam cum d ad unitatem eandem habeat proportionem, quàm l habet ad ipſum h: qui ex d & h fit, æqualis erit ei, qui fit ex unitate, & l. ergo q ipſi l erit æqualis.* Υ

Cum oſtenſum ſit ſphæras ad inuicem proportionem habere triplam eius, quæ eſt ſuarum diametrorum.] *Oſtenditur id proportione ultima duodecimi elementorum. quare cum diameter papaueris ad diametrum ſphæræ digito æqualem eam proportionem habeat, quam unum ad quadraginta: unũ autem ad quadraginta habeat eam, quam quadraginta ad mille ſexcẽta; et quam mille ſexcenta ad ſexaginta quatuor millia: ſequitur ſphærã, cuius diameter digito eſt æqualis, habere ad ſphæram papaueris proportionem eandem, quam ſexaginta quatuor millia ad unum.* Z

Minor eſt igitur, quam unitates decem ſecundorum numerorum.] *A ſex unitatibus ſecundorum numerorum ad decem idcirco tranſitum fecit Archimedes, ut ad numeros deueniret in proportione decuplos, in quibus facilis eſt propoſiti demonſtratio, ut ſuperius dictum eſt.* ω


AL DVS


BIBLIOTECA NAZIONALE CENTRALE


OTIVM
SINE LITERIS
MORS EST
Seneca
Ex Libris Joannis Nencini
1874